Vom ersten Lesen zur formulierten Lösung:

Mathematisches Problemlösen als mehrschrittiger kognitiver Prozess.

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen dem Landesprüfungsamt–Außenstelle Köln vorgelegt von:

Gereon Stefer

Köln, im März 2016

Themenstellerin: Prof. Dr. Ellen Aschermann
Humanwissenschaftliche Fakultät – DP Psychologie
Pädagogische Psychologie

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Problemlösen im Mathematikunterricht ist ein Trendthema der Mathematikdidaktik der letzten Jahre. Diese Arbeit soll der Frage nachgehen, was ein Problem eigentlich ist und welche Schwierigkeiten einer erfolgreichen Problemlösung im Wege stehen können. Da Problemlösen im Mathematikunterricht unweigerlich mit Denken und Nachdenken verbunden ist und darin Lernfortschritte erzielt werden sollen, muss zuvörderst die Frage geklärt werden, auf welche Weise Denk- und Lernprozesse verstanden werden können.

Diese Arbeit beschreibt diese Prozesse aus einer kognitionspsychologischen Perspektive. Im ersten Kapitel werden ihr die beiden recht populären alternativen Standpunkte des Situierten Lernens und des Konstruktivismus in ihren Grundannahmen kurz vorgestellt, kritisch hinterfragt und so die Validität der psychologischen Perspektive untermauert.

In einem zweiten Schritt muss die Frage geklärt werden, was unter einem Problem aus psychologischer Perspektive zu verstehen ist. Da die Antwort in Dörners Standardwerk „Problemlösen als Informationsverarbeitung[1] " an mathematischer Exaktheit vermissen lässt, wird sie mit Pólyas mathematischer Sicht kontrastiert, um einen möglichst trennscharfen Problembegriff zu erhalten. Für die Zwecke der Unterrichtsbetrachtung muss der so gewonnene Problembegriff jedoch wieder pragmatisch relativiert werden.

Erst nach dieser Vorarbeit ist es möglich, einen verständigen Blick auf die mentalen Prozesse des Problemlösens zu werfen. Grundlage sind hierfür Dörners Darstellungen der Gedächtnisfunktionen und kognitiver Prozesse, die ausführlich dargestellt werden. Im Rahmen dieser Betrachtung stellt sich heraus, dass auf Grund der Strukturierung

1 Dörner, D.: Problemlösen als Informationsverarbeitung. Kohlhammer, 1979, Kohlhammer Standards Psychologie: Denkpsychologie.

menschlicher Erinnerung und menschlichen Denkens die Versprachlichung von Problemlösungen, die in der Schule als evaluatives und diagnostisches Werkzeug für die Lehrperson als notwendig vorausgesetzt werden muss, selbst ein Problem im eigentlichen Sinne ist. Dies macht eine Betrachtung von Sprache und Semiotik nötig.

Zunächst soll aber der Erfahrungsschatz von Mathematikern und Mathematikerinnen über Problemlöseprozesse vorgestellt und dabei auch die Frage geklärt werden, warum Probleme in der Mathematikdidaktik einen so hohen Stellenwert einnehmen.

Es folgt ein kurzer Exkurs in die Semiotik und Sprachtheorie. Auf Grund der Komplexität und des Vorraussetzungsreichtums dieser Themenfelder (und auf Grund der klar psychologischen inhaltlichen Schwerpunktsetzung dieser Arbeit) wird ihre Darstellung hier nur skizzenhaft und ausschnittweise geschehen.

2 Warum eine kognitionspsychologische Perspektive?

In der Betrachtung von Mathematikunterricht ist es vorab nötig, die eigenen zu Grunde liegenden Vorstellungen von Lernprozessen offenzulegen – zu viele zum Teil ideologische und sich gegenseitig widersprechende Konzepte und Perspektiven gibt es. So lassen sich nach wie vor Mathematiklehrer erleben, die dem Behaviourismus mit seiner Einfachheit und seiner vermeintlichen Gleichstellung aller Schülerinnen und Schüler anhängen; mancher Mathematikunterricht folgt gar noch dem Paradigma des Nürnberger Trichters. Modernere Strömungen in der Mathematikdidaktik sind Konstruktivismus und Situiertes Lernen.

Die geläufigsten Einwände dieser beiden Positionen gegen ein Kognitions – basiertes Modell des Mathematikunterrichts sind nach John R. Anderson et al., dass sich komplexe kognitive Prozesse nicht in Teilprozesse zerlegen und sich nicht aus ihrem spezifischen Kontext lösen lassen[1]. Anderson bestreitet diese Thesen mit Erkenntnissen aus der Kognitionsforschung; seine Argumente lassen sich dahingehend zusammenfassen, dass der Mensch mit seinem sehr begrenzten Kurzzeitgedächtnis und seiner Unfähigkeit zum Multi-Tasking komplexe Aufgaben sequentiell in einfacheren Prozessen und Routinen abarbeitet, die in vielen Fällen nicht einmal kontextspezifisch sind. So lassen sich für viele komplexe und kontextbezogene Prozesse „Kochrezepte“ angeben, die eine Abfolge von einfachen und kontextunabhängigen Prozeduren beschreiben, die in dieser Reihenfolge ausgeführt ein sehr spezifisches Problem lösen, (vgl. Kapitel 4, Seite 21).

1 Anderson, John R., Reder, Lynne M. und Simon, Herbert A.: Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. 2000, S. 2.

Durchaus interessant ist es, die wesentlichen Argumente des Konstruktivismus und des Situierten Lernens kritisch zu betrachten, um den eigenen Standort genauer bestimmen zu können.

2.1 Die Positionen des Situierten Lernens

Das erste Paradigma der Vertreter des Situierten Lernens ist: „Handlungen sind in ihrer spezifischen Handlungssituation bedingt“[2]. Dagegen ist zunächst nichts einzuwenden, Handlungen erschließen sich für den Betrachter nur aus dem Kontext, und Handlungen aus ihrem Kontext zu lösen und in andere Kontexte zu stellen, weckt Befremden oder Belustigung; Pantomimen zum Beispiel beziehen daraus ihren Unterhaltungswert. Problematisch wird diese Aussage jedoch, wenn sie auf die Person übertragen wird, die die Handlung vollzieht. Wenn vorrangig der jeweilige situative Kontext die Handlungen eines Individuums bedingt, wird die Situation zur eigentlich Handelnden, die die Aktionen der ausführenden Person triggert, welche dann lediglich situationsbezogen reagiert, anstatt autonom zu agieren. Zur Untermauerung dieser These werden, so Anderson, häufig anekdotische Berichte überliefert über Personen, die in realen Kauf- und Verkaufssituationen souverän Preise und Summen kalkulieren, an entsprechenden Schulaufgaben aber scheitern[3].

Daraus folgt ein zweites Paradigma, nämlich: „Es gibt keinen Wissenstransfer zwischen unterschiedlichen Aufgaben[4]“[5]. Mit dieser These gibt es zunächst ein logisches Problem. Aus der Tatsache, dass sich in Einzelfällen informelles Wissen nicht in formelle Zusammenhänge übertragen lässt (vom brasilianischen Kokosnusskiosk in die Schule) folgt erstens logisch keineswegs, dass der umgekehrte Transfer auch nicht stattfinden kann. Zum anderen wird hier implizit unterstellt, dass

2 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 4 „Action is grounded in the concrete Situation in which it occurs“ Ü.d.A.

3 A. a. O., S. 4.

4 Anderson benutzt hier das Wort *task*, welches generelle Handlungsaufforderungen bezeichnet. Dies ist nicht notwendig als Mathematikaufgabe oder Problemstellung zu verstehen, auch Zähneputzen oder Holz hacken können eine task sein. Ich werde hier zunächst naiv den Begriff Aufgabe benutzen. In Kapitel 3 werde ich die deutschen Begrifflichkeiten für den Rest der Arbeit genauer fixieren.

5 A. a. O., S. 5 „Knowledge does not transfer between tasks“ Ü.d.A.

gerade die Transferfähigkeit von Wissen situationsunabhängig gleich Null sein soll, während Wissen und Lernhandeln vorrangig vom situativen Kontext bestimmt werden. Lernen „an sich“ strikt an den Kontext zu fixieren, sekundäre Lernparameter (Transfer) aber für global und kontextfrei übertragbar zu erklären, ist nicht schlüssig. Hier finden also gleich zwei unzulässige (und dazu widersprüchliche) Verallgemeinerungen statt.

Der von Anderson vorgestellte Forschungsstand ist erwartbar auch nicht situationsübergreifend gleich und eindeutig. Es zeigt sich, dass in der Tat der Transfer von Wissen zwischen zwei Aufgaben sowohl in Abhängigkeit von der Profizienz der Probanden als auch von Natur und der Aufbereitung der Aufgabenstellung[6] sehr unterschiedlich gut funktioniert. Wesentlich für einen guten Transfer scheint zu sein, dass die unterschiedlichen Aufgaben analoge kognitive Strukturen[7] erfordern und dass die Probanden diese Ähnlichkeiten erkennen. Anderson zieht hierfür zwei Studien heran. In der ersten Studie sollten Versuchspersonen mit verschiedenen Texteditoren arbeiten. Es zeigte sich, dass die Probanden den Übergang von einem Programm zum nächsten schneller bewältigten, je stärker die Editoren ähnliche abstrakte Strukturen aufwiesen; die Benutzeroberfläche konnte dabei sogar sehr verschieden sein[8]. In einer anderen Studie von Gick und Holyoak sollten Versuchspersonen ein Problem lösen, nachdem ihnen eine Lösung eines analogen Problems in Form einer Geschichte vorgelegt worden war. Diese Probanden hatten zwar eine geringfügig höhere Erfolgsquote als die Kontrollgruppe ohne Geschichte, doch ließ sich die Erfolgsquote erst dann deutlich steigern, nachdem die Probanden auf den Nutzwert der Geschichte hingewiesen worden waren[9], hier ließ sich der Transfer also sogar bewusst herbeiführen.

Das dritte Paradigma des Situierten Lernens ist: „Abstraktes Üben ist unnütz; echtes Lernen findet in authentischen Situationen statt“[10]. Dies ist sicher die These des Situierten Lernens, die die meiste Resonanz

6 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 6.
7 vgl. Kapitel 4, S. 22.
8 A. a. O.
9 A. a. O.
10 A. a. O., S. 7 „Training by abstraction is of little use; real learning occurs in “authentic” situations.“ Ü.d.A.

findet; auch in der Mathematikdidaktik ist die Forderung nach „authentischen Lernsituationen" nicht zu überhören. Haltbar ist sie in dieser generellen Form jedoch nicht. Anderson schreibt über eine Studie von Biedermann und Shiffrar:

> „Sie betrachteten die sehr schwierige Aufgabe, das Geschlecht von einen Tag alten Küken zu bestimmen – eine Aufgabe, die in der praktischen Ausbildung Jahre braucht, um sie zu meistern. Es stellte sich heraus, dass 20 Minuten theoretischer Einweisung Neulinge auf den Könnensstand von Experten mit jahrelanger Erfahrung brachte."[11]

Anderson räumt ein, dass abstrakte Theoriestunden ohne eine geeignete Anbindung an einen jeweiligen Sachkontext wenig Transfer erlauben[12]. Sehr stark auf einen Realitätsbereich spezialisierter Unterricht lässt allerdings auch wenig Transfer auf andere Bereiche zu[13], da sich die Bereiche im Detail zu stark unterscheiden werden. Der gewählte Abstraktionsgrad der Lerneinheiten muss sich also an den jeweiligen Lernzielen orientieren. Wenn es nötig ist, eine Person möglichst effizient für einen sehr begrenzten Aufgabenkreis auszubilden, so ergibt es Sinn, ein sehr spezialisiertes Training anzubieten[14]. Für allgemeinbildenden Unterricht ohne eine klare Berufsfeldausrichtung erscheint es sinnvoller, stärker theoretischen Unterricht zu halten, an dessen Inhalte später in viele Richtungen effizient angeknüpft werden kann. In der Schule haben abstrakte, theoretische Inhalte also sicher ihren Platz.

Darüberhinaus ist Mathematik in vielerlei Hinsicht die Wissenschaft des Abstrakten, die sich in ihren vielen Idealisierungen und Verallgemeinerungen dem konkret Lebensweltlich-Authentischen widersetzt, (vgl. auch Kapitel 5.1, Seite 31). Bereits der erste im Unterricht betrachtete Zahlenraum $\mathbb{N}^+$, die natürlichen Zahlen ab der 1, verletzt in seiner

11 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 7 „Perhaps the most striking demonstration of the benefit of abstract instruction comes from Biederman and Shiffar (1987). They looked at the very difficult task of sexing day–old chicks – something that people spend years learning in an apprentices–like role. They found that 20 minutes of abstract instruction brought novices up to the levels of experts who had years of practice." Ü.d.A.

12 A. a. O., S. 7.

13 A. a. O., S. 8.

14 A. a. O.

Unendlichkeit die Gesetze des Konkreten. Auch später lassen sich 0 Äpfel nicht angemessen konkret darstellen. Irrationale Zahlen, Stoff der Sekundarstufe I, sind ebenfalls ein genuin mathematisches Objekt. Sie spielen in unserer Lebenspraxis keine Rolle. Schon ein naiver Begriff von Mengen als beliebige Zusammenstellung von Dingen führt in der Mathematik zu verheerenden Widersprüchen und muss durch ein komplexes Axiomensystem ersetzt werden. Diese Sachverhalte lassen sich nicht konkret und zum Anfassen im Unterricht behandeln.

Ein weiteres Paradigma des Situierten Lernens ist: „Unterricht muss in möglichst interaktiven Sozialformen stattfinden.“[15] Zu dieser These führen zwei Prämissen, erstens die obige These, dass Lerninhalte extrem kontextgebunden sind, und zweitens, dass deren spätere Anwendungen, wie zum Beispiel in der beruflichen Arbeit, immer im sozialen Kontext stattfinden[16]. Auch wenn Alltag und Arbeit häufig soziale Interaktion umfassen, so wird es doch auch immer Tätigkeiten geben, die allein ausgeführt werden müssen, somit ist diese Konklusion nicht schlüssig. Sozial interaktive Lernformen haben jedoch ihre Befürworter nicht nur im Lager des Situierten Lernens, auch in der allgemeinen mathematischen Fachdidaktik nehmen sie in den letzten Dekaden zunehmend Raum ein.

Aus kognitionspsychologischer Perspektive ist die Bewertung von Gruppenarbeit und anderen interaktiven Unterrichtsstrukturen dabei weder einheitlich noch einfach. Zunächst ist das Studiendesign nicht trivial. Anderson führt eine Metastudie des US-amerikanischen National Research Council von 1994 an, nach der in zahlreichen Untersuchungen über Lerneffekte von interaktiven Sozialformen die Versuchsbedingungen für die Kontrollgruppen nicht hinreichend berücksichtigt wurden, indem Lerngruppen nicht randomisiert wurden und die unterschiedlichen Gruppen von unterschiedlichem Lehrpersonal unterrichtet wurden. Somit überlagern andere, erwiesen signifikante Effekte die zu quantifizierenden Gruppeneffekte in nicht abschätzbarer Form und kompromittieren so die Studienergebnisse[17]. Die Datenlage für posi-

15 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 8 „Instruction needs to be done in a highly social environment“.

16 A. a. O., S. 8.

17 A. a. O., S. 9.

tive Effekte interaktiver Sozialformen ist also dünner, als sie auf den ersten Blick erscheint.

Dazu kommen gruppendynamische Effekte. Gruppenarbeit z.B. kann nur bei allen Partizipanten den gleichen Lerneffekt hervorrufen, wenn alle gleichermaßen motiviert und aktiviert sind und sich mit den gleichen Lerninhalten beschäftigen. In der Praxis wird Gruppenarbeit immer arbeitsteilig stattfinden und unterschiedliche Mitglieder der Gruppe werden sich höchst unterschiedlich einbringen; das sprichwörtliche defätistische Akronym „Toll, ein anderer macht's!" für Team-Arbeit ist nicht aus der Luft gegriffen. Gruppenarbeiten, die wiederholt nach demselben Schema ablaufen, in dem z.B. die hellsten Köpfe der Gruppe das gestellte Problem weitgehend alleine lösen, die Person mit der schönsten Schrift protokolliert, die Person mit den besten Computerskills eine Präsentation erstellt und die Person mit den besten rhetorischen Fähigkeiten die Ergebnisse präsentiert, während die Person, die sich am besten drücken kann, sich aus all diesen Prozessen weitgehend fernhält, werden also zwangsläufig zu stark divergierenden individuellen Lernergebnissen innerhalb dieser Gruppe führen. Diese individuellen Lernergebnisse werden insbesondere häufig nicht dem eigentlichen Lernziel der Aufgabenstellung entsprechen.

Es lässt sich festhalten, dass hochinteraktive Sozialformen keine Selbstläufer sind, die per se die gewünschten Lerninhalte befördern. Sie müssen sorgfältig angelegt und angeleitet werden, damit die Gruppenmitglieder gleichermaßen aktiviert und motiviert werden[18]. Zudem eignen sie sich nicht ohne Weiteres, um Skilllevel innerhalb einer Lerngruppe zu homogenisieren, da sie u.U. Spezialisierungen eher befördern.

Insgesamt lässt sich aus kognitionspsychologischer Perspektive über die Grundthesen des Situierten Lernens festhalten, dass sie im Kern nicht unberechtigt sind, aber dabei wesentliche Teile der Faktenlage ausblenden. Kontext spielt eine große Rolle in Lernprozessen, Transfer muss gut vorbereitet sein und hochspezialisierte Skills und Arbeit in der Gruppe bedürfen des Trainings in ihrem jeweiligem Kontext.

18 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 9.

Auf der anderen Seite lässt sich im Sinne der Allgemeinbildung durch sorgfältig angelegten theoretischeren Unterricht ein breites Spektrum an Grundfertigkeiten anlegen, an die später in Alltagssituationen und in der konkreten Berufsausbildung in viele Richtungen angeknüpft werden kann. Die konkreten Sozialformen spielen dabei eher eine untergeordnete Rolle, so lange sinnstiftende und motivierende Lernprozesse angestoßen werden.

2.2 Die Positionen des Konstruktivismus

Der Konstruktivismus hat im Vergleich zum Situierten Lernen auf den ersten Blick inhaltlich nicht so eng verwandte Axiome. Sie sind weniger praktischer Natur, sondern eher weltanschauliche Prinzipien, die in ihrer Summe jedoch geeignet sind, den Lernvorgang weitgehend zu mystisieren und der Evaluation und Bewertung zu entziehen. Das erste Paradigma lautet: „Wissen kann nicht von einer Lehrperson gelehrt oder vermittelt werden, Wissen kann nur vom Lernenden konstruiert werden“[19]. Diese These begegnet einem häufig in Verbund mit der Behauptung, dass nur echte intrinsische Motivation diesen Konstruktionsprozess in Gang setzen kann und extrinsische Anreize keine rechte Wirkung entfalten. Wären diese beiden Annahmen richtig, so wäre die bloße Idee von Schulbildung eine Illusion. Aber auch ohne dieses zweite Postulat stellt der Konstruktivismus eine Herausforderung der Schule dar. Der Konstruktionsprozess wird als radikal-individueller aktiver Vorgang betrachtet, der in den Lernenden eine individuelle innere Konstruktion der äußeren Lebenswirklichkeit entstehen lässt, die sich der äußeren Betrachtung und Evaluation entzieht[20]. Die radikale Individualität dieses Vorgangs macht es den Lehrenden unmöglich, sinnvolle Hilfestellungen und Impulse zu geben.

Aus kognitionspsychologischer Perspektive gibt es jedoch durchaus empirisch begründete Vorstellungen, wie die mentale Repräsentation der Lebenswirklichkeit aussehen kann (vgl. Kapitel 4). Der Lernvor-

19 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 10 „Knowledge cannot be instructed (transmitted) by a teacher, it can only be constructed by the learner“ Ü.d.A.

20 vgl. Kapitel 2.2 Seite 13

gang wird auch hier als aktiv angesehen, allerdings sind Lernfortschritte an deklarativem Wissen und Skills empirisch quantifizierbar. Die Lehrperson hat Bedeutung als eine Person, die Denk- und Lernprozesse anstoßen kann. Auch die Gestaltung und Präsentation der Stimuli durch eine Lehrperson zeigt sich, empirisch betrachtet, in Unterschieden in den individuellen Lernprogressionen[21].

Der Konstruktivismus schlägt sich in seiner gemäßigten Form in einer grundsätzlichen Bevorzugung entdeckenden Lernens in der Mathematikdidaktik nieder, welches selbstmotiviertes, eigenständiges Lernhandeln erfordert. Aus Sicht der kognitionspsychologischen Forschung ist das nicht haltbar. Auch direkte Instruktion bringt messbare Erfolge; Anderson schreibt:

> „Es gibt in der Forschung starke Belege, dass sich Menschen unter gewissen Umständen besser an Informationen erinnern, die sie für sich selber aufbereiten, als an Informationen, die sie passiv aufgenommen haben. [...] Das heißt jedoch nicht, dass Menschen sich nicht merken können, was man ihnen sagt. In anderen Studien können sich Personen gleich gut oder sogar besser an Informationen erinnern, die ihnen zur Verfügung gestellt wurde, als an Informationen, die sie selber aufbereiten."[22]

Dazu kommt aus mathematischer Sicht die prinzipielle Überforderung, die ein entdeckendes Lernen von Ideen und Strukturen bedeuten würde, die über eine Jahrtausende alte Mathematiktradition von exzeptionellen Köpfen beständig weiterenwickelt und ausformuliert wurden. So wird zum Beispiel niemand, der den Schulstoff der Differential- und Integralrechnung, vulgo Kurvendiskussion und Integrieren, bereits nicht versteht und anwenden kann, in der Lage sein, das zu Grunde liegende Leibnizsche Infinitesimalkalkül entdeckend zu lernen. Wer

21 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 12.

22 A. a. O., S. 12 „There is a great deal of research, showing that, under some circumstances, people are better at remembering information that they create for themselves than information they receive passively. ... However, this does not imply that people do not remember what they are told. Indeed, in other cases people remember as well or even better information that is provided than information they create." Ü.d.A.

binomische Formeln nicht erkennt und anwenden kann, nachdem sie in Anwendungsbeispielen gezeigt und eingeübt wurden, wäre nie in der Lage gewesen, sie eigenständig zu entdecken, sie zu einer Gesetzmäßigkeit zu abstrahieren und auszuformulieren.

Das nächste konstruktivistische Paradigma, das Anderson betrachtet, ist: „Wissen kann nicht symbolisch repräsentiert werden“[23]. Motiviert ist diese These durch den geheimnisvollen Konstruktionsprozess. Da die Lernprozesse so individuell verschieden sind und so individuelle Konstruktionen erzeugen, ist es nicht denkbar, für die mannigfaltigen individuellen Konstruktionen starre, universelle symbolische (und damit sprachliche) Repräsentationen zu finden. In letzter Konsequenz verhindert dieses Paradigma jeden sinnvollen sprachlichen Austausch. Wenn wir sprachlich immer in unserer selbst konstruierten Sprache auf unsere eigenen Konstrukte referieren, die prinzipiell inkommensurabel mit anderen Sprachen und Konstrukten sind, ist gegenseitige Sinnvermittlung bestenfalls zufällig. Letztendlich ist diese Perspektive aber eine Vertauschung von Ursache und Wirkung. Sprache wird im sozialen Miteinander konstituiert und aus individueller Perspektive gelernt. Missverständnisse sind natürlich möglich, im Kern steht aber die faktische kommunikative Praxis, die es möglich macht, Sprache zu lernen. Der Konstruktivismus missversteht Repräsentation als „a priorischen, objektiven und definitiven Ersatz“ für die äußere Realität, statt als flexibles, reaktives Modell.

Der konstruktivistische Vorbehalt gegen sprachliche Repräsentation lässt sich auf Vorstellungen mentaler Repräsentation übertragen. In Abschnitt 4.4 wird dargestellt werden, wie Wissen, Sprache und Symbole aus kognitivistischer Perspektive im menschlichen Gedächtnis abgelegt sind, wie diese Repräsentation funktioniert und intersubjektive Verständigung ermöglicht.

Mathematik ist insbesondere im obigen Sinne eine soziale Praxis symbolischer und sprachlicher Ausdrucksformen, und ihre Gegenstände und Abstraktionen sind ohne Repräsentation nicht denkbar, (vgl. auch Kapitel 5.1,Seite 31).

23 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 13 „Knowledge cannot be represented symbolically “ Ü.d.A.

Das dritte konstruktivistische Paradigma lautet: „Wissen kann nur in komplexen Lernsituationen kommuniziert werden“[24]. Die Idee hinter diese These ist, dass nur authentisches, reiches Erleben zu angemessenen und kohärenten Konstruktionen führt, während Dekontextualisierung und stückweise Aufbereitung von Lerninhalten zu disjunkten Fehlkonstruktionen führt. Lerninhalte lassen sich jedoch prinzipiell in Schritte und Komponenten zerlegen, die effizient für sich geübt werden können[25].

Diese dritte These wird jedoch besonders interessant in Verbindung mit dem nächsten Paradigma, nämlich: „Es ist nicht möglich, Lernfortschritte mit standardisierten Verfahren zu messen“[26]. Die individuellen Konstruktionen können nicht zum Objekt äußerer Bewertung gemacht werden. Subjektive Leistungen können nicht objektiv bewertbar sein. Diese Überzeugung geht häufig einher mit der Annahme, dass die Lernenden selber am besten wissen, wo sie im Lernprozess stehen, und daher ihre Leistungen am besten selbst einschätzen können. Dies ist aus psychologischer Sicht fragwürdig, speziell wenn die Lernenden hochkomplexe Themen und Probleme bearbeiten sollen. Dunning und Kruger stellen in ihrem Artikel „Unskilled and unaware of it: How difficulties in recognizing one’s own incompetence lead to inflated self-assessments“[27] die These auf, dass gerade Personen mit geringen Fähigkeiten in einem Gebiet ihr Können hochgradig überschätzen und sich erst mit einer hohen Kompetenz in einem Fachgebiet die nötige Einsicht einstellt, welches Wissen und welche Skills unabdingbar und wichtig sind[28] und wie gut man sie tatsächlich beherrscht[29]. Gerade in

24 Anderson, Reder und Simon: Applications and Misapplications, S. 15 „Knowledge can only be communicated in complex learning situations“ Ü.d.A.

25 A. a. O., S. 16.

26 A. a. O., S. 16 „It is not possible to apply standard evaluations to assess learning“ Ü.d.A.

27 Dunning, D. und Kruger, J.: Unskilled and unaware of it: How difficulties in recognizing one’s own incompetence lead to inflated self-assessments. 1999, S. 1121 ff.

28 A. a. O., S. 1121.

29 Dunnings und Krugers Ergebnisse sind in ihrer Effektstärke umstritten. Die Diskussion dreht sich jedoch vorrangig die Frage, ob und warum Probanden mit höherer Kompetenz ihre Skills besser einschätzen können oder gar unterschätzen, wie von Dunning und Kruger behauptet, oder ob Menschen aller Skilllevel mit ihrem Self-Assessment aus unterschiedlichen Perspektivenverzerrungen ähnlich weit danebenliegen. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt die gut belegte und

sehr komplexen Prozessen und Themengebieten bedarf es einer guten Gesamtsicht der Dinge. Zudem unterstellt die These, dass Lernende selber am besten beurteilen können, wo sie stehen und was sie können, eine idealisierte „Unschuld der Motive“ und ignoriert dabei die realweltlichen sekundären Anreize der Leistungsbewertung in der Schule. Dass viele Schülerinnen und Schüler im Schulalltag bereits die Notwendigkeit von Kopfrechenskills und Zahlvorstellungen mit Hinweis auf Taschenrechner und Smartphones bestreiten, ist ein weiteres Indiz für die Schwierigkeiten mit diesen konstruktivistischen Grundannahmen.

In der weniger grundsätzlich verstandenen Variante dieses letzten Paradigmas sind Lernfortschritte bewertbar, aber nicht nach einheitlichen Kriterien, die die individuellen Lernfortschritte gewissermaßen über einen Kamm scheren. Das macht Leistungsbewertung bereits in ihrer Konzeption äußerst subjektiv und letztendlich beliebig.

Insgesamt lässt sich als gemeinsamer Nenner der konstruktivistischen Paradigmen eine Neigung zu einem relativistischen Subjektivismus erkennen. Alle Konstruktionen – und damit alle Skilllevel, Standpunkte und Überzeugungen – sind gleich gut und gleich valide und nicht von einer objektiven Warte aus bewertbar. De facto wird damit jede Wissenschaft zu epistemischer Gewaltausübung, also zu dem Versuch, mit akademischer Deutungshoheit vielfältige individuelle Überzeugungen zu unterdrücken.

2.3 Konsequenzen für den Unterricht

Aus kognitionspsychologischer Sicht bleiben aus dieser Diskussion der Positionen des Situierten Lernens und des Konstruktivismus folgende Lehren für den allgemeinbildenden Unterricht an Schulen: Damit wirksamer Transfer stattfinden kann, muss eine stabile Basis an breit angelegtem Wissen und Skills aufgebaut werden und Transfer in spezielle Wissensbereiche exemplarisch erprobt und geübt werden. Dabei ist theoretischer Unterricht durchaus hilfreich, praktische Anwendungen dürfen allerdings nicht vollständig vernachlässigt werden. Sozialfor-

---

unbestrittene Feststellung, dass Novizen in einem Sachgebiet realistische Einschätzungen ihrer Kompetenz im Allgemeinen nicht gut gelingen, vgl. Schlösser et al[30].

men müssen mit Augenmaß auf die jeweiligen Lerninhalte abgestimmt und methodisch so angeleitet werden, dass tatsächlich alle Teilnehmer im Sinne der Lernziele davon profitieren.

Die Rolle der Lehrperson ist es, Lernprozesse zu strukturieren und Inhalte in ansprechender und zugänglicher Weise in überschaubaren Einheiten so darzubieten, dass Lernprozesse angestoßen werden. Symbolische Repräsentation von Lerninhalten ist möglich, muss aber gut begleitet werden, um Missverständnissen vorzubeugen, bzw. sie aufzudecken. Lernende brauche regelmäßiges Feedback, um ihren wahren Leistungsstand wahrzunehmen; Leistungsmessung im Unterricht bleibt schwierig.

3 Was ist ein Problem?

Der Begriff „problem“ findet in der englischsprachigen mathematischen Fachliteratur geradezu inflationäre Verwendung. Unter dem Überbegriff „math problem“ werden Aufgabentypen aller Art zusammengefasst, bis hin zur repetitiven Übungsaufgabe, deren Zweck Routinebildung in bereits erlernten Skills ist, deren Erfüllung aber nicht notwendig noch große Konzentration erfordert. Selbst die Aufgabe „$1 + 1 =?$“ ist in diesem Sinne ein „math problem“, Textaufgaben werden als „word problem“ bezeichnet.

Im Deutschen gibt es vergleichbare Schwierigkeiten mit dem Wort Aufgabe, welches ein Spektrum von „routinemäßiger Arbeitsauftrag“ bis „nahezu unlösbares Problem“ umfasst. Georg Pólya nimmt in seinem Buch „Vom Lösen mathematischer Aufgaben“ folgende Begriffsbestimmung vor:

> „[Es] wird allgemein ja nach den Umständen ein Wunsch zu einer Aufgabe führen oder nicht. Bringt mich der Wunsch sofort, ohne Schwierigkeit, auf den Gedanken an eine naheliegende Handlungsweise, durch die ich das Gewünschte voraussichtlich erhalten werde, dann habe ich kein Problem. Kommt mir aber kein solcher Gedanke in den Sinn, dann habe ich ein Problem, dann habe ich, um das Gewünschte zu erreichen eine Aufgabe zu lösen. Eine Aufgabe haben bedeutet, *bewußt nach einer Handlungsweise suchen, die dazu angetan ist, ein klar erfaßtes, aber nicht unmittelbar erreichbares Ziel zu erreichen.* [...] ein gewisser Grad von Schwierigkeit gehört zu dem Wesen des Begriffs der Aufgabe: Wo es keine Schwierigkeit gibt, gibt es auch keine Aufgabe.“[1]

1 Pólya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Birkhäuser Verlag, 1966, S. 173.

Pólya führt also den Begriff einer Aufgabe auf den eines Problems zurück, wobei „ein Problem haben“ hier bedeutet, Schwierigkeiten zu haben, einen Weg zur Erfüllung des initialen Wunsches zu bestimmen. Dabei engt er den Begriff Aufgabe so stark ein, dass viele Situationen, wie etwa Rechenaufgaben zur Routinebildung, für die allgemeinsprachlich das Wort Aufgabe verwendet würde, nicht mehr bezeichnet werden können.

Dietrich Dörner grenzt Probleme und Aufgaben wie folgt voneinander ab:

> „Was ein Problem ist, ist einfach zu definieren: ein Individuum steht einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den wünschenswerten Zielzustand zu überführen.
> Ein Problem ist also gekennzeichnet durch drei Komponenten:
> 1. Unerwünschter Anfangszustand s_α
> 2. Erwünschter Endzustand s_ω
> 3. Barriere, die die Transformation von s_α in s_ω verhindert.
> [...]
> Wir grenzen Probleme von *Aufgaben* ab. Aufgaben sind geistige Anforderungen, für deren Bewältigung Methoden bekannt sind. [...] Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen muss etwas Neues geschaffen werden.“[2]

Dörner unterscheidet im Folgenden vier Typen von Problemen. Probleme, deren Zielvorstellungen klar umrissen sind und deren Methoden im Grundsatz bekannt sind, nennt er Interpolationsprobleme. Zu deren Lösung muss nur eine geeignete Reihenfolge von Handlungen gefunden werden. Er nennt als Beispiel ein erfolgreiches Schachspiel gegen einen Schachcomputer[3]. Probleme, deren Zielvorstellung klar

2 Dörner: *Problemlösen*, S. 10.
3 A. a. O., S. 12.

ist, die jedoch neuer, unbekannter Methoden bedürfen, nennt Dörner Syntheseprobleme, zum Beispiel den alchimistischen Wunsch, aus Blei Gold zu machen[4]. Probleme, bei denen die Zielvorstellung in ihren Kriterien unklar sind, („[e]ine neu einzurichtende Wohnung soll *schöner* werden als die alte“[5]) nennt Dörner dialektisch. Zuletzt gibt es noch die Kombination, in der die Problemstellung dialektisch und synthetisch in Dörners Sinne ist, die Zielvorstellung ist verschwommen und die Methoden sind auch unklar[6].

Dörner würde das, was Pólya als Aufgabe bezeichnet, Problem nennen. Das entspricht besser alltagssprachlichen Gewohnheiten, weswegen es sinnvoll erscheint, Dörners Unterscheidung zwischen Aufgaben und Problemen im Wesentlichen zu übernehmen und Pólyas Aufgaben forthin als Probleme zu bezeichnen. Das führt zu keinen sprachlichen oder logischen Schwierigkeiten mit den Formulierungen in Pólyas Definition. Die beiden Definitionen scheinen sich auf den ersten Blick sehr zu ähneln, im Detail ergeben sich jedoch Unterschiede. Beide stellen einen Wunsch an erste Stelle, (wobei Dörner den Umweg über einen Anlass geht) und die nicht sofortige Erfüllbarkeit des Wunsches. Während Pólya jedoch den fehlenden Gedanken an Handlungsoptionen als die eigentliche Herausforderung betrachtet, ist es bei Dörner das Fehlen der Mittel. Das führt zu interessanten Unterschieden, so werden bei Dörner alle Dinge, die sich mit der Zeit selber lösen, zum Problem. Einer minderjährigen Person, die jetzt gerade mit ihrem Auto fahren möchte, aber bis zum 18. Geburtstag warten muss, bis sie ihren Führerschein bekommt, fehlen „im Moment die Mittel“, den wünschenswerten Zustand „Auto fahren“ herzustellen. Sie hat also nach Dörner ein Problem. Gleichzeitig ist die Handlungsweise zur Lösung banal, nämlich warten. Die Methode ist also hinlänglich bekannt, es handelt sich bei diesem Problem daher im Sinne Dörners auch gleichzeitig um eine Aufgabe. Situationen, die Kooperation erfordern, sind bei Dörner ebenfalls im engeren Sinne immer Probleme und Aufgaben zugleich. Einem Menschen, dem auf dem Dach die zum Abstieg benötigte Leiter umgefallen ist, fehlen die Mittel, den erwünschten Endzustand herzustellen, auch

4 Dörner: *Problemlösen*, S. 12.
5 A. a. O., S. 13.
6 A. a. O.

wenn die naheliegende Lösung ist, Hilfe zu rufen. Dörners Definition ist also zwischen beiden Begriffen nicht wirklich trennscharf, das ist ein Widerspruch den Pólya vermeidet, indem er nicht die Mittel, sondern den Gedanken an den Lösungsweg in das Zentrum seiner Begriffsbestimmung setzt.

Zudem lässt sich auf reproduktive Weise Neues schaffen. Zum Beispiel ist die Suche nach neuen Mersenne-Primzahlen, Primzahlen der Form $p = 2^n - 1$, eine rein algorithmische Tätigkeit, wirft aber neues Wissen ab. Beweise, die durch „number crunching", also massenhafte automatische Fallunterscheidungen per Computer geführt werden, wie der erste Beweis des Vier–Farben–Problems, schaffen neue Gewissheiten mit bekannten und sogar automatisierbaren Methoden. Dörners Forderung nach Neuschöpfung ist also nicht haltbar.

Pólya wiederum schränkt das Spektrum möglicher Probleme drastisch ein, indem er fordert, dass das Ziel ein „klar erfaßtes"[7] sein soll, er lässt damit nur Interpolations- bzw. Syntheseprobleme im Sinne Dörners zu. Im Mathematikunterricht spielen aber durchaus auch dialektische Probleme eine Rolle, zum Beispiel Fermi-Aufgaben (sic!). Pólya und Dörner stellen den Wunsch an den Anfang eines Problems. Nun mag es im Mathematikunterricht so sein, dass der Wunsch der Schülerinnen und Schüler, ein Problem zu lösen, welches von der Lehrperson an sie herangetragen wird, nicht so recht ausgeprägt ist. Außerdem stellen die Rahmenbedingungen des Schulunterrichtes weitere Anforderungen an eine Lösung, sie muss nicht nur den inneren Wunsch Pólyas und Dörners erfüllen, sondern auch in einer Weise externalisiert werden, die der Lehrperson Grundlage für Diagnose und Bewertung sein kann. Eine Problemlösung im Mathematikunterricht muss also sprachlich oder schriftlich dokumentiert werden, erst dann kann ein Problem als gelöst gelten. Es gibt dabei inhaltliche und formale Anforderungen an diese Dokumentation, die Schülerinnen und Schüler sollen schlüssig und auf Grund fachlicher theoretischer Grundlagen ihre Ergebnisse und Lösungswege erläutern und begründen können. Zufallsfunde oder Formulierungen wie „Das hab ich halt so gemacht und dann kam da was raus." erfüllen diese Kriterien nicht.

7 Pólya: *Vom Lösen*, S. 173.

Für diese Arbeit sollen Probleme im Mathematikunterricht demnach Anforderungen sein, die von den Schülerinnen und Schülern zum Zeitpunkt der Arbeitsaufforderung nicht durch bekannte schematische, algorithmische oder rein reproduktive Methoden zu erfüllen sind. Zudem soll die Lösung eine Begründung zur Validierung erfordern. Aufgaben sollen Anforderungen sein, die im Gegensatz dazu durch bekannte schematische, algorithmische oder rein reproduktive Methoden zu erfüllen sind und bei denen die Validität der Lösung durch korrekte Anwendung der jeweiligen Schemata, Algorithmen oder Methoden sichergestellt ist.

4 Wie funktioniert Kognition?

Bereits wenn man nur eine einfache Handlungsvorschrift erfüllen will, muss eine ganze Reihe grundsätzlicher Voraussetzungen erfüllt sein. Man muss die Dinge kennen, mit denen man umgehen soll, und man muss wissen, wie man mit ihnen umgehen kann und darf. Um den Auftrag „Stell mal das Glas Wasser dort auf den Tisch!“ zufriedenstellend zu lösen, muss man wissen, was ein Glas ist (nicht die Tasse), was Wasser ist (nicht der Orangensaft), was der Tisch ist (nicht der Stuhl), was dort heißt (nicht in der Kneipe an der Ecke), wie man mit Glas umgeht (vorsichtig anfassen, statt beherzt zuzugreifen) und wie man dabei das Wasser nicht verschüttet (das Glas aufrecht halten, keine hektischen Bewegungen). Man braucht also ein „Wissen was“ und ein „Wissen wie“.

Dietrich Dörner bezeichnet das „Wissen was“ als Sachverhalte und das „Wissen wie“ als Operatoren. Zusammen bilden sie das, was Dörner die epistemische Struktur nennt[1]. Die epistemische Struktur enthält das zur Bewältigung einer Aufgabe nötige Weltwissen, also ein (hoffentlich) differenziertes Kategoriensystem, das es ermöglicht, Sachverhalte zu unterscheiden, und sie enthält ein Wissen über Operatoren, die auf den Sachverhalten wirken[2]. Diese Operatoren können komplex und vielschrittig sein, dann sind sie Kombinationen einfacherer Operatoren[3]. Zum Beispiel ist das Flicken eines Fahrradreifens ein zusammengesetzter Prozess. Zunächst muss man den Schlauch freilegen und möglicherweise das Rad vorher demontieren. Dann muss man das Loch finden und entscheiden, ob es zu flicken ist. Wenn ja, muss man geeignetes Material und Werkzeug auswählen und fachgerecht

1 Dörner: *Problemlösen*, S. 26.
2 A. a. O.
3 vgl. die „Kochrezepte“ in Kapitel 2, S. 4

benutzen. Schlussendlich gehört das Fahrrad wieder fahrtüchtig zusammengebaut. Dieser ganze Prozess ist der Operator „Fahrrad flicken".

Nun sind Probleme[4] dadurch ausgezeichnet, dass kein geeignetes „Wissen wie", kein passender Operator zu ihrer Lösung zur Verfügung steht. Bekannte Operatoren müssen nun neu und geschickt kombiniert werden, um einen schlüssigen neuen Operator zu bilden. Jedes Individuum verfügt dazu über eine „Bibliothek" von Verfahren für die Auswahl und Einschätzung von geeigneten Operatoren; diese Verfahren können mehr oder weniger spezialisiert und erfolgversprechend sein. Um zum Beispiel aus einem unvertrauten Schlüsselbund den richtigen Schlüssel für eine Tür auszuwählen sind viele Methoden denkbar. Zunächst kann man alle Schlüssel ausprobieren. Das ist bei einer großen Anzahl Schlüssel aber aufwendig. Man kann dieses Ausschlussverfahren aber auch verfeinern, indem man beispielsweise die Schlüssel nach Größe und Form vorsortiert und nur die ausprobiert, die in Frage kommen. Aus dieser Vorauswahl kann man diejenigen Schlüssel auswählen, die vom Alter her zur Tür passen könnten, oder man könnte den Hersteller des Schlosses mit dem der Schlüssel vergleichen.

Solcherlei spekulative Verfahren zum Auffinden unbekannter, geeigneter Optionen heißen Heurismen. Für das Problemlösen braucht man also Heurismen zur Rekombination bekannter Operatoren. Die individuelle Verfahrensbibliothek von allgemeinen und fachbereichsspezifischen Heurismen, die jeder Person zur Verfügung stehen, nennt Dörner heuristische Struktur[5].

Epistemische Struktur und heuristische Struktur zusammen bilden nach Dörner die kognitive Struktur, also die individuelle „geistige Ausstattung[6]", die zum Problemlösen befähigt. Die epistemische Struktur und die heuristische Struktur sind im Gedächtnis abgelegt, somit muss man ihre Architektur und Funktionsweise betrachten, um die Frage nach der kognitiven „Mechanik" des Problemlösens beantworten zu können.

4 im Sinne von Kap. 3.
5 Dörner: *Problemlösen*, S. 26.
6 A. a. O.

4.1 Das Gedächtnis

Das menschliche Gedächtnis gliedert sich in drei Teile, den sensorischen Speicher, das Kurzzeitgedächtnis und das Langzeitgedächtnis. Der sensorische Speicher enthält aktuelle Reize, die unsere Sinne über das Nervensystem an ihn herantragen. Die „Halbwertszeit“ dieses Speichers liegt bei unter einer halben Sekunde, die Information verfällt, wenn sie nicht an das Kurzzeitgedächtnis weitergereicht wird[7]. Das Kurzzeitgedächtnis hat eine Kapazität von ungefähr sieben Items, die memoriert werden, solange sie nicht von neuen Einheiten überschrieben werden[8]. Vom Langzeitgedächtnis wird angenommen, dass es beinahe beliebige Kapazität und Speicherdauer hat, jedoch ist der Vorgang, neue Inhalte abzulegen, langwierig und damit in seinem Volumen über die Zeit begrenzt[9]. Die Fähigkeit, lange nicht benötigte Informationen wieder abzurufen, ist jedoch erfahrungsmäßig beeinträchtigt. Die epistemische Struktur und die heuristische Struktur sind im Langzeitgedächtnis abgelegt[10]; dessen Strukturierung und die Art und Weise, wie das Arbeitsgedächtnis auf sie zugreift, sind also für den Problemlöseprozess maßgeblich.

Dörner hält sich an Normans Vorstellung des Langzeitgedächtnisses als aktives semantisches Netzwerk. Ein aktives semantisches Netzwerk ist ein gerichteter Graph, ein Netz aus Knoten die durch Pfeile verbunden sind. Die Knoten sind dabei Repräsentanten der Objekte aus dem jeweiligen Realitätsbereich, den das semantische Netz abbilden soll. Die Pfeile zeigen die Relationen an, in denen die Objekte zueinander stehen. Die Pfeile an Stelle einfacher Linien sind notwendig, da Beziehungen nicht zwangsläufig reziprok sind. Im Folgenden Schaubild eines semantischen Netzwerkes liebt Mary Bob, aber nicht umgekehrt, und Bob trinkt Bier, aber nicht umgekehrt:

7 Dörner: *Problemlösen*, S. 28.
8 A. a. O.
9 A. a. O., S. 26.
10 A. a. O., S. 28.

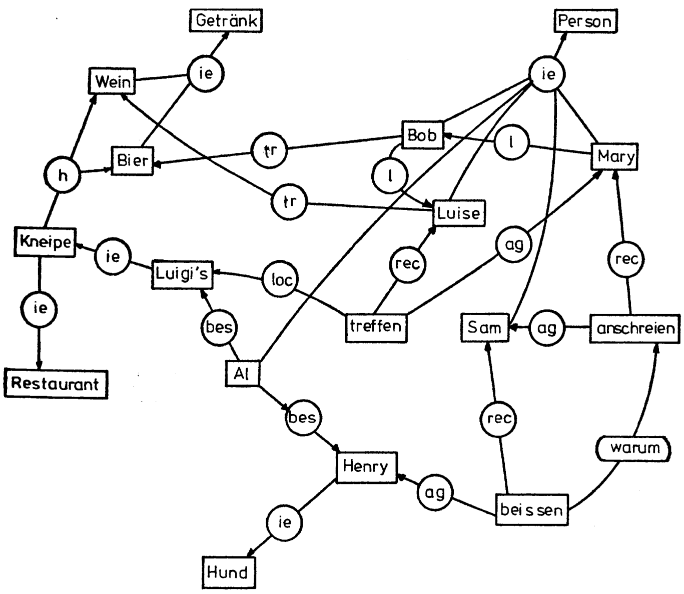

Abb. 4: Beispiel für ein semantisches Netzwerk. »l« bedeutet »liebt«, »tr« bedeutet »trinkt«. Weitere Erklärungen im Text. (Nach Lindsay & Norman 1972, S. 406)

Abbildung 4.1: Semantisches Netzwerk (Dörner: *Problemlösen*, S. 29)

Dörner beschreibt die in dieser Abbildungen vorkommenden Relationen:

> „Die »ist-ein-Relation« (ie); z.B. »Henry ist ein Hund«. Auf begrifflicher Ebene entspricht diese Relation einer Unterbegriff – Oberbegriff – Beziehung.
> Die »hat-Relation« (h); z.B. »eine Kneipe hat Bier«. Diese Relation entspricht der »Ganzes – Teil – Relation«.
> Die »Agenten-Relation« (ag); z.B. »Henry beißt«, d.h. Henry ist der Ausführende der Operation »beißen«.
> Die »Recipienten-Relation« (rec); z.B. »Sam wird gebissen«. Sam ist also Zielobjekt einer Handlung. Die rec-Relation bezieht also eine Handlung auf das, was von dieser Handlung betroffen ist.
> Die »Lokalisations – Relation« (loc); z.B. »Mary trifft Luise bei Luigi's«. Ein bestimmtes Ereignis findet an einem bestimmten Ort statt, bzw. ein bestimmtes Objekt findet sich an einem bestimmten Ort."[11]

11 Dörner: *Problemlösen*, S. 30.

Eine so aufbereitete Datenstruktur kann also sehr komplexe Zusammenhänge speichern und auf sehr simple Weise ausgelesen und durchsucht werden, das leistet beim Menschen das Kurzzeitgedächtnis. Um zu entscheiden, ob Henry ein Hund oder eine Person ist, muss von seinem Knoten ausgehend nur die Menge der benachbarten Knoten ausgelesen werden, um die Antwort zu finden. Für komplexere Fragestellungen müssen Pfade durch das Netzwerk gesucht werden. Der dabei notwendige Übergang von einem Knoten zum nächsten geschieht entweder so, dass das Kurzzeitgedächtnis den alten Knoten durch den neuen ersetzt, oder den neuen Knoten mit in den Arbeitsspeicher aufnimmt. Das Kurzzeitgedächtnis mit seiner geringen Kapazität kann rund sieben dieser Knoten gleichzeitig „anfassen", dabei wird klar, dass die Effizienz solcher Suchprozesse maßgeblich von der Strukturierung des Netzwerkes abhängt.

Lernvorgänge erweitern und verändern das Netzwerk. Im Piagetschen Sinne assimilierende Lernprozesse fügen dem Netzwerk weitere Knoten und Pfeile hinzu. Bei in diesem Sinne akkomodierenden Lernschritten muss das Netz umgestaltet werden, indem darüberhinaus bestehende Knoten und Pfeile neu verlinkt werden, um entstehende Widersprüche und konfligierende Pfade aufzulösen.

4.2 Die epistemische Struktur

Nach Dörner ist eine epistemische Struktur die Abbildung eines Realitätsbereiches als aktives semantisches Netzwerk im Langzeitgedächtnis. Er beschreibt am Beispiel des Realitätsbereiches Chemie, wie deklaratives Wissen effizient in einem solchen Netzwerk dargestellt werden kann. Er stellt dabei drei Dimensionen an Relationen dar, in denen Wissen über Chemie organisiert werden kann:

> „[...] nämlich *Teil – Ganzes – Relationen* (sprachlich oft ausgedrückt durch Ausdrücke wie »besteht aus«, »hat«, u.ä.) *Abstraktheits* - oder *Oberbegriffs – Unterbegriffs – Relationen* (sprachlich oft ausgedrückt durch »ist ein«) und *raum – zeitliche Relationen* (»ist um ... angeordnet«, »folgt auf«).[12]"

12 Dörner: *Problemlösen*, S. 32.

Wenn man in diesem Netzwerk den Knoten mit dem Namen „Wasser“ betrachtet, so sind diesem Begriff in dieser Struktur bereits viele Informationen assoziiert. Wasser hat H_2O Moleküle, ist eine Verbindung, ist kein Gemisch, sondern ein reiner Stoff, ist bei Raumtemperatur eine Flüssigkeit. Wenn man als weitere Dimension die Operator-Relation in das Netzwerk einflicht, also, was man mit Wasser alles machen kann, oder was Wasser alles tut, dann explodiert die Anzahl der Verbindungen geradezu: Wasser kann man durch Abkühlen zu einem Feststoff einfrieren, Wasser kann man durch Erhitzen in ein Gas umwandeln, Wasser lässt sich durch Verbrennung von Wasserstoff herstellen und durch Elektrolyse in Wasserstoff und Sauerstoff trennen, Wasser löst Kochsalz, heißes Wasser gart Frühstückseier und Brokkoli, Wasser schafft Tropfsteinhöhlen und wäscht Täler aus, Wasser löscht Brände, Wasser löscht Durst, Wasser könnte auf dem Mars Leben ermöglichen, Wasser duchläuft den Regenkreislauf und vieles mehr.

Eine parallele Form von Organisation des Gedächtnisses ist daneben die Bildung von Komplexionen. Komplexionen sind „Funktionseinheiten“ von Objekten in raum-zeitlichen Anordnungen. Ein Esszimmer zum Beispiel ist eine solche Komplexion, die eine zeitgleiche Anordnung von einer Mehrzahl an Stühlen und mindestens einem Tisch in einem Raum bezeichnet. Ein Hm7b5 ist eine Komplexion, die ein zeitgleiches und räumlich benachbartes Erklingen der Töne h, d, f und a bezeichnet. Anhand dieser Beispiele wird deutlich, dass Komplexionen sehr personenindividuelle Gebilde sind. Der oben benannte Akkordname wird bei geübten Jazzpianisten sofort einen Klangeindruck, unterschiedliche Griffbilder und Skalenoptionen und die Erwartung eines auf diesen Akkord folgenden Dominantseptakkordes auf E hervorrufen. Individuen mit Grundkenntnissen am Klavier können sich vorstellen, wie solch ein Akkord auf der Klaviatur aussieht und wie er in wenigen Varianten zu greifen ist. Musikalische Laien verbinden mit dieser Referenz auf eine Komplexion überhaupt nichts.

Die für die Komplexionsbildung nötige Abstraktion kennt dabei mehrere Richtungen, einen Stuhlkreis von Schulkindern kann man so entweder als unstrukturierten Klassenverband oder als kreisförmige Anordnung von Objekten auffassen, je nachdem, welche Perspektive gerade wesentlich erscheint. Je nachdem, welche Leerstellen man in der Abstraktion zulässt, erscheinen Komplexionen als Konglomerat von Objekten, oder als Gestalt, das heißt als Regelwerk von Relationen, das auf unterschiedliche Objekte übertragbar, also transponierbar ist[13].

Demnach scheinen sich für das Lösen eines Problems auf Basis der epistemischen Struktur zwei grundsätzliche Wege anzubieten. Auf der einen Seite die low-level Suche nach einem Pfad von Operatoren zwischen wahrgenommenen Ausgangszustand und antizipiertem Zielzustand. Oder die erfolgreiche Transposition einer passenden Gestalt aus bekannten Sachverhalten auf die neue, lückenhafte Problemsituation. Existierende Gestalten werden vor der Transposition häufig auf die neue Problemsituation akkomodiert, oder gar gänzlich neu abstrahiert.

4.3 Die heuristische Struktur

Der heuristischen Struktur obliegt es, solche Such- und Akkomodationsprozesse zu steuern. Das geschieht im Wesentlichen nach dem TOTE-Schema[14], wobei TOTE ein Akronym für „Test–Operate–Test–Exit" ist. Es wird also anfangs geprüft, ob der Zielzustand nicht bereits erreicht ist; in dem Falle wäre das Problem gelöst. Danach wird in jedem Schritt eine Veränderung, etwa ein Suchschritt auf der ES ausgeführt und dieser wird auf Erfolg geprüft; liegt nun der Zielzustand vor, wird der Prozess verlassen (Exit), ansonsten wird ein weiterer Schritt gemacht. Im Sinne einer Breitensuche in einem semantische Netzwerk lassen sich mehrere dieser TOTE-Schemata rekursiv verschachteln, in dem Sinne, dass ein Knoten auf Gangbarkeit geprüft wird, indem seine Nachbarknoten geprüft werden. Stellt man fest, dass alle Nachbarknoten Sackgassen sind, so kann der Ausgangsknoten verworfen werden.

Dörner wirft die „Tintenfischhypothese" auf, nach der sich die HS wie ein Tintenfisch an einem Fischernetz, welches die ES darstellen soll, entlangbewegt[15]. Der Tintenfisch berührt mit seinen Tentakeln die Knoten und kann sich an den Kanten entlanghangeln. Damit beschreibt er aber lediglich die Suchvorgänge des Kurzzeitgedächtnisses

13 Dörner: *Problemlösen*, S. 38.
14 A. a. O., S. 40.
15 A. a. O., S. 37.

auf der epistemischen Struktur[16]. Bei der heuristischen Struktur scheint es sich viel mehr um eine Bibliothek an Suchmustern bzw. einen Kompass für vielversprechende Suchrichtungen (die sich vielleicht auch als Intuitionen bezeichnen ließen) zu handeln.

Bei der Betrachtung von Verlaufsprotokollen, die Dörner in seinem Buch aufführt, lassen sich die Suchmuster nachvollziehen. Eine Versuchsperson bekommt eine Teilbarkeitsaufgabe. Die Aufgabe ist es zu beweisen, dass Zahlen der Form $(xyzxyz)_{10}$ durch 13 teilbar sind[17]. Sie rechnet einige Beispiele durch, verfolgt dann eine Quersummenhypothese, die sie rasch verwirft, versucht dann mit dem Primzahlbegriff zu arbeiten, der jedoch offensichtlich nicht zielführend ist, worauf sie kurz die Zahl π ins Spiel bringt, die als transzendente Zahl in Teilbarkeitsfragen mit natürlichen Zahlen völlig abwegig ist. Als die Versuchsperson merkt, dass sie sich offenbar verrennt, steuert sie bewusst in die Richtung Vielfache, worauf sie schnell eine Bildungsvorschrift für die Dividenden erhält, die diese als gemeinsame Vielfache von 13 erkennen lassen.

Der „Tintenfisch“ Kurzzeitgedächtnis hangelt sich hier also zunächst von der Fragestellung ausgehend sehr assoziativ durch unterschiedliche und zunehmend abseitige Abstraktionsebenen, Überbegriffe und Tangenten des Ausgangsproblems, bevor er durch eine metakognitive Intervention auf den richtigen Pfad gesetzt wird.

Dörner vermutet, dass komplexere Heurismen sich durch Verhaltensformung, also quasi evolutionär aus einem zunächst unstrukturierten „trial and error“ bei Säuglingen herausbilden[18]. In späteren Entwicklungsstadien ermöglichen metakognitive Kompetenzen eine bewusste Neukombination von Operatoren. Unter Metakognition soll hier, wie im Beispiel gesehen, ein bewusster Eingriff in kognitive Prozesse verstanden werden.

16 vgl. Kapitel 4.1, S. 25.
17 Dörner: *Problemlösen*, S. 38.
18 A. a. O., S. 42.

4.4 Problemlösen und Sprache

Da in Kapitel 3 zur vollständigen Lösung eines Problems im Mathematikunterricht eine sprachliche oder schriftliche Dokumentation und Begründung der Korrektheit der jeweiligen Lösung gefordert wurde, ist es nötig, hier über den Zusammenhang zwischen Sprache, Semiotik und kognitiven Prozessen nachzudenken. Die behaviouristische These, dass Denken und Sprechen dasselbe seien, ist offensichtlich nicht haltbar[19]. Dörner führt als Argument hierfür die „Sprachnot[20] “an, die Situation, dass eine Person einen klaren Gedanken nicht versprachlichen kann, ihr die Worte fehlen.

Sprache, Wörter und Zeichen sind in unserem epistemischen System in der gleichen Weise abgelegt, wie es die mentalen Bilder unserer Realitätsbereiche sind[21]. Das heißt, das Wort „Fahrrad“ und das zusammengesetzte Schriftsymbol „Fahrrad“ sind nicht im mentalen Knoten für Fahrrad enthalten. Sie haben vielmehr jeweils eigene Knoten, die auf eine Komplexion Fahrrad referenzieren, in Form einer „bezeichnet-Relation“. Da nun Komplexionen sich individuell unterscheiden, liegt hierin der erste Grund für eine intersubjektive sprachliche Unschärfe. Für unterschiedliche Menschen referenzieren Worte also auf im Detail unterschiedliche Vorstellungen, evozieren Worte andersartige mentale Bilder. Derlei Missverständnisse mögen in den meisten Alltagsfällen keine Rolle spielen, im Mathematikunterricht, in dem Individuen mit einem großen Gefälle an fachlicher und fachsprachlicher Profizienz aufeinandertreffen, werden solche Probleme sicher auftreten.

Eine weitere Schwierigkeit ist die Transponierbarkeit von Lösungen von der Operatorebene auf eine sprachliche, zumal deren sprachliche Ausformulierung formalen und formallogischen Kriterien genügen muss. Wenn zu Beginn des Kapitels von Heurismen und Intuitionen die Rede war, so wird klar, dass die oben beschriebene innere mentale Methode zum Problemlösen nicht als äußere Begründung satisfaktionsfähig ist[22]. (Zudem weiß ein Mathematiker, dass zwischen dem sicheren Gefühl, ein Problem gelöst zu haben, und dem sicheren Wis-

19 Ein weiteres Argument gegen behaviouristische Unterrichtstheorien.
20 Dörner: *Problemlösen*, S. 49.
21 A. a. O.
22 Mein innerer Tintenfisch hat da halt angefasst!

sen, eine Lösung sauber aufgeschrieben zu haben, ein weiter Weg liegt.) Zunächst gilt es also, sich die notwendigen (sic!) benutzten Operatoren und Transpositionen bewusst zu machen. Im Falle von Operatoren ist nun zu prüfen, ob diese algorithmisch richtig und unter formal korrekten Voraussetzungen angewandt wurden. Transpositionen, die intuitiv-analogisch auf das Problem passen, müssen nun in ihren wesentlichen (sic!) Details auf ihre theoretische Haltbarkeit überprüft und begründet werden. Die sprachliche Ausformulierung dieser Sachverhalte wird in den meisten Fällen Fachvokabular benötigen, welches in der Epistemische Struktur hinreichend sicher vernetzt sein muss, um abrufbar, also im aktiven Wortschatz, zu sein.

Diese kurzen Betrachtungen legen nahe, dass die sprachliche Beschreibung und Begründung von Problemlösungen für sich genommen immer schon ein Problem im Sinne Pólyas oder Dörners darstellt.

5 Die mathematische Perspektive

Nachdem nun die Perspektive dieser Arbeit auf Lernprozesse geklärt ist, und vor dem Hintergrund der Kognitionspsychologie und einem intuitiven Verständnis von Mathematik und Mathematikunterricht eine Arbeitsdefinition des Problembegriffes im Mathematikunterricht vorgestellt wurde, wären nun belastbare Begriffe von Mathematik und Mathematikunterricht wünschenswert, auf deren Aspekte bereits häufig angespielt wurde. Die Episteme der Mathematik ist aber ein eigentümliches Zwitterwesen: Einerseits liegt ihr seit ihrer Grundlagenkrise im frühen 20. Jahrhundert ein abstraktes Axiomensystem zu Grunde, welches Bezüge zur realen Welt als eher nebensächlich und arbiträr erscheinen lässt. Zum anderen erfahren mathematische Aussagen und Algorithmen alltäglichen und selbstverständlichen Gebrauch selbst und gerade in kritischen und gefährlichen Anwendungen[1], und Mathematiker nehmen lebensweltliche Phänomene als Anlass für ihre Forschungen. Jeder Versuch einer Definition der Mathematik als solche muss daher (in bester Gödelscher Manier) unvollständig bleiben oder Widersprüche enthalten.

5.1 Grundsätzliches

Für die Zwecke dieser Arbeit ist die genaue Natur der Mathematik bei näherer Betrachtung unerheblich, im Fokus dieser Untersuchung stehen ja weniger die mathematischen Objekte oder Werkzeuge, sondern eher der Umgang mit ihnen. In Kapitel 3 zeichnete sich bereits ab, dass sich mathematische Tätigkeit in zwei distinkten Bereichen abspielt, zum

1 wie zum Beispiel in den Ingenieurswissenschaften.

einen auf der individuellen mentalen Ebene (hier: Problem lösen) und zum anderen im intersubjektiven Austausch (hier: Lösung versprachlichen). Das entspricht der differenzierten Vorstellung mathematischen Handelns, wie sie Alan H. Schoenfeld beschreibt:

> „Mathematik ist eine von Grund auf soziale Praxis, in der eine Gemeinschaft von geübten Akteuren (mathematische Wissenschaftler) die Wissenschaft der Muster betreibt – systematische Versuche auf Basis von Beobachtung, Forschung und Experimenten, um die Natur und Gesetze von Regelmäßigkeiten in Systemen zu bestimmen, die entweder axiomatisch definiert bzw. theoretisch begründet sind („Reine Mathematik"), oder die Modelle von Zusammenhängen sind, die aus der realen Welt abstrahiert werden („Angewandte Mathematik"). Mathematische Werkzeuge sind dabei Abstraktion, symbolische Repräsentation und Manipulation von Symbolen. Wie auch immer, in den Gebrauch der Werkzeuge eingewiesen zu sein heißt noch nicht, dass man mathematisch denkt, wie das Kennen von Holzwerkzeugen einen nicht gleich zum Handwerker macht. Mathematisch Denken lernen heißt (a) eine mathematische Perspektive zu entwickeln – die Prozesse des Mathematisierens und Abstrahierens zu würdigen und Freude an der Beschäftigung mit ihnen zu haben, und (b) Kompetenz im Umgang mit den mathematischen Werkzeugen zu erlangen und sie mit dem Ziel zu gebrauchen, Strukturen zu verstehen – mathematische Sinnstiftung."[2]

2 Schoenfeld, Alan H.: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. 1992, S. 335: „Mathematics is an inherently social activity, in which a community of trained practitioners, (mathematical scientists) engages in the science of patterns, – systematic attempts, based on observation, study and experimentation, to determine the nature or principles of regularities in systems defined axiomatically or theoretically ("pure mathematics") or models of systems abstracted from the real world ("applied mathematics"). The tools of mathematics are abstraction, symbolic representation and symbolic manipulation. However, being trained in the use of the tools no more means that one thinks mathematically than knowing how to use shop tools makes one a craftsman. Learning to think mathematically means (a) developing a mathematical point of view – valuing the processes of mathematization and abstraction and having the predilection to apply them, and (b) developing competence with the

Kern seines Mathematikbegriffes sind das mathematische Handeln als soziale Praxis und mathematisches Denken. Mathematisches Handeln ist dabei vor allem sprachliches Handeln, es erfordert Kenntnis des Fachvokabulars und Kenntnis der der Mathematik eigenen schriftsprachlichen Chiffren und Konventionen, (hierauf wird in Kapitel 6 weiter eingegangen werden).

5.2 Mathematisches Denken und Probleme

An dieser Stelle soll zunächst das mathematische Denken betrachtet werden: seine Domäne, seine Methodik und wie es Mathematikerinnen und Mathematiker in ihrem Alltag erleben und einsetzen. Schoenfeld stellt ebenfalls die in Kapitel 3 benannte Unschärfe des Problembegriffs im Englischen fest, und er unterscheidet analog zu dieser Arbeit Aufgaben („Tasks Required To Be Done“[3]) als „Mittel zu einem bestimmten Zweck“[4] und Probleme („Problems That Are Problematic“[5]), die er zwar nicht explizit als „Zweck an sich“ bezeichnet, aber so zu verstehen scheint. Schoenfeld schreibt:

> „Es gibt eine spezielle mathematische Perspektive auf die Rolle, die Probleme im Leben derer spielen, die Mathematik betreiben. Das einende Element ist, dass es die fortschreitende Arbeit von Mathematikerinnen und Mathematikern ist, Probleme zu lösen – Probleme der „verblüffenden oder schweren“ Sorte, um genau zu sein“[6].

Schoenfeld zitiert im Folgenden Halmos, der weiter zuspitzt:

> „Woraus besteht Mathematik *eigentlich*? Aus Axiomen (wie dem Parallelenaxiom)? Theoremen (wie dem Fundamentalsatz der Albgebra)? Beweisen (wie Gödels Beweis für

tools of the trade and using those tools in the service of the goal of understanding structure – mathematical sense making.“ Ü.d.A.

3 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 338.
4 A. a. O., S. 338 „Means to a Focused End“Ü.d.A.
5 A. a. O., S. 338.
6 A. a. O., S. 338 f. „there is a particularly mathematical point of view regarding the role that problems play in the lives of those who do mathematics. The unifying theme is that the work of mathematics, on an ongoing basis, is solving problems – problems of the "perplexing or difficult" kind, that is.“ Ü.d.A..

> Unentscheidbarkeit)? Definitionen (wie Mengers Definition der Dimension)? Theorien (wie die Kategorientheorie)? Formeln (wie die Cauchy-Integralformel)? Methoden (wie die Methode der Intervallschachtelung)?
>
> Mathematik könnte es ohne diese Zutaten nicht geben, sie sind alle essentiell. Es ist nichtsdestotrotz eine vertretbare Perspektive, dass nichts von diesen Dingen den Kern der Sache trifft, dass die Daseinsberechtigung für Mathematikerinnen und Mathematiker ist, Probleme zu lösen, und dass, daher, Mathematik *eigentlich* aus Problemen und Lösungen besteht.[7]“

Probleme finden und Problemlösen sind also das essentielle Kerngeschäft mathematischen Denkens. Die Denkanlässe können dabei durchaus banal und alltäglich sein. Schoenfeld zitiert das Beispiel des Mathematikers Henry Pollack, der angesichts variierender Artikelobergrenzen für die Benutzung von Supermarkt-Schnellkassen das Problem aufwirft, welche Anzahl Artikel denn nun die korrekte obere Schranke für die Benutzung der Schnellkassen sei[8]. Problemlösen bekommt hier also geradezu den Rang einer Ideologie und Lebenseinstellung zugeschrieben.

5.3 Der Denkprozess

Nachdem nun der Stellenwert des Problemlösens in der Mathematik bekannt ist, scheint es sinnvoll, zu schauen was Mathematikerinnen und Mathematiker über den Problemlöseprozess schreiben und ob dies mit der psychologischen Perspektive aus Kapitel 4 kommensurabel

7 Halmos, P.: The heart of mathematics. 1980, S. 519: What does mathematics *really* consist of? Axioms (such as the parallel postulate)? Theorems (such as the fundamental theorem of algebra)?Proofs (such as Gödel’s proof of undecidability)? Definitions (such as the Menger definition of dimension)? Theories (such as category theory)? Formulas (such as Cauchy’s integral formula)? Methods (such as the method of successive approximations)? Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view, that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician’s main reason for existence is to solve problems and, therefore, what mathematics *really* consists of is problems and solutions.“ Ü.d.A.

8 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 341.

ist. Pólya beschreibt den Prozess der mathematischen Forschung (und damit den Prozess des Problemlösens) im Großen und Ganzen als Ratespiel.

> „Einem Mathematiker, der ein tätiger Forscher ist, mag die Mathematik manchmal als ein Ratspiel erscheinen: Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist, man muß die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Einzelheiten durchführt.
>
> Einem aufgeschlossenen Philosophen muß, glaube ich, jede intelligente Aneignung von Wissen manchmal wie ein Ratspiel vorkommen. Wenn wir in der Wissenschaft oder im täglichen Leben einer neuen Situation gegenüberstehen, so versuchen wir erst einmal, das Richtige zu erraten. Unser erster Ratversuch schießt vielleicht weit am Ziel vorbei, aber wir versuchen es damit und je nach dem Erfolg wird er mehr oder weniger modifiziert. Nach verschiedenen Versuchen und verschiedenen Modifizierungen, von Beobachtungen angelegt und von Analogie geleitet, gelingt uns das Raten schließlich besser. Der Laie findet es nicht überraschend, daß der Naturforscher auf diese Art verfährt. [...] Der Laie ist, wie wir sagten nicht überrascht, daß der Naturforscher wie er selbst auf Raten angewiesen ist. Er ist jedoch überrascht zu finden, dass dies auch bei dem Mathematiker der Fall ist. Nun ist wohl das Resultat der schöpferischen Arbeit des Mathematikers demonstratives Schließen, ein Beweis, aber der Beweis wird durch plausibles Schließen, durch Erraten, entdeckt. [...]
>
> Mathematische Fakten werden erst erraten und dann bewiesen und das gegenwärtige Buch versucht in allen seinen Teilen zu zeigen, daß dies das normale Verfahren ist. Wenn das Erlernen der Mathematik irgendetwas mit ihrer Entdeckung zu tun haben soll, muß dem Schüler Gelegenheit gegeben werden, Aufgaben zu lösen, in denen er eine ma-

> thematische Tatsache auf geeignetem Niveau erst errät und dann beweist.“[9]

Das entspricht in der Tat in groben Zügen der Beschreibung von Problemlöseprozessen aus Kapitel 4.3, indem nach dem TOTE-Schema hypothetische Lösungen ausprobiert werden, um sie zu verwerfen oder zu verwerten.

Aus Dörners Perspektive ließe sich differenzieren, dass die spekulative Gewinnung neuer mathematischer Definitionen und Sätze eher in den Bereich dialektischer Probleme einzuordnen ist, während die Beweisfindung und Begründung von Aussagen und Sätzen eher synthetische oder Interpolationsprobleme aufwirft. In diesem Sinne lässt sich eine Strategie von Mathematikerinnen und Mathematikern erkennen, bei unklaren Problemlagen auf spekulative Weise eine klare Zielvorstellung und Plausibilitätskriterien für einen Lösungsansatz zu gewinnen und so dialektische Probleme auf Interpolationsprobleme zurückzuführen.

Schoenfeld betrachtet (ohne diese Differenzierung) den Problemlöseprozess in der Mathematik, und er macht „fünf Anspekte der Kognition“[10] aus, die für den Prozess eine zentrale Rolle spielen, und zwar

- die Wissensgrundlage,
- Problemlösestrategien,
- Monitoring und Selbstkontrolle,
- Überzeugungen und Gefühle,
- Gepflogenheiten.[11]

5.3.1 Die Wissensgrundlage

Schoenfeld versteht unter der Wissensgrundlage den Schatz an deklarativem und prozeduralem Wissen, der im Langzeitgedächtnis über einen

9 Pólya, G.: Mathematik und plausibles Schliessen. Birkhäuser Verlag, 1963, S. 240-244.
10 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 348.
11 A. a. O.

Realitätsbereich zur Verfügung steht[12]. Schoenfeld schlägt der Wissensgrundlage auch sprachliche soziale und habituelle Aspekte zu, wie „Wissen über die Regeln des Diskurses in dem entsprechenden Fachgebiet.“[13] Dieses Wissen kann jeweils mehr oder weniger korrekt sein und als mehr oder weniger sicher empfunden werden[14]. Einen großen Schwerpunkt legt Schoenfeld auf Komplexionen, die er „chunks“[15] nennt. Er stellt folgende Beispielaufgabe aus dem Bereich Geometrie vor:

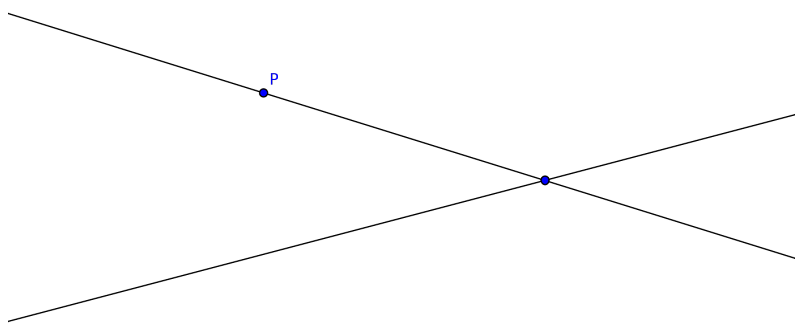

Abbildung 5.1: Geometrieaufgabe (Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 349, verändert)

> „Gegeben seien zwei sich schneidende Geraden und ein Punkt P auf einer der Geraden, wie in der Abbildung. Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Kreis, der beide Geraden als Tangente hat, und der die eine Gerade in P berührt.“[16]

12 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 349.
13 A. a. O., S. 349: „knowledge about the rules of discourse in the domain“ Ü.d.A.
14 A. a. O., S. 350.
15 A. a. O., S. 351.
16 A. a. O., S. 349 „You are given two intersecting straight lines and a point P marked on one of them, as in the figure below. Show how to construct, using a straight edge and compass, a circle that is tangent to both lines and that has the point P as its point of tangency to one of these lines“ Ü.d.A.

Interessant an dieser Stelle scheint das notwendige Wissen, um diese Aufgabe zu bewältigen. (Der nächste Absatz dient der Illustration und darf übersprungen werden, ohne wesentliche Argumente dieser Arbeit zu übersehen.)

Zunächst ist wichtig deklarativ zu wissen, dass eine Tangente in ihrem Berührpunkt senkrecht auf den Radius des Kreises von diesem Punkt steht. Weiter sind die Punkte auf dem Umfang eines Kreises genau die Punkte der geometrischen Ebene, die den gleichen Abstand zum Mittelpunkt des Kreises haben. Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist der Abstand von dem Schnittpunktes des Lotes von diesem Punkt auf die Gerade mit dem Punkt. Punkte, die den gleichen Abstand von zwei sich schneidenden Geraden haben, liegen auf den jeweiligen Winkelhalbierenden. Also lässt sich Schlussfolgern (Diskurswissen), dass der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises auf einer Senkrechten zu der Geraden liegt, die P enthält, die diese Gerade in P schneidet, und dass M auf einer der Winkelhalbierenden liegen muss. Nun muss das prozedurale Wissen vorliegen, mit Zirkel und Lineal eine Senkrechte auf eine Gerade in einem bestimmten Punkt und eine Winkelhalbierende zu konstruieren. Danach muss nur noch ein Kreis um M mit dem Radius des Abstandes zwischen M und P geschlagen werden.

Interessanterweise sind die Mittel zur Lösung dieser Aufgabe, eine Senkrechte in einem bestimmten Punkt auf eine Gerade und eine Winkelhalbierende, weder im konstituierenden Sinne Eigenschaften von Kreisen noch von Geraden. Für die Lösung dieser Aufgabe sind also komplexe und über das Offensichtliche hinaus beziehungsreiche Vorstellungen von den Gegenständen vonnöten.

Schoenfeld gibt an, dass für „Expertise in unterschiedlichen Wissensbereichen [...] jeweils ca. 50.000 chunks im Langzeitgedächtnis“[17] verankert sein müssen.

17 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 352 „expertise in various domains depends on having access to some 50,000 chunks of knowledge in LTM“ Ü.d.A.

5.3.2 Problemlösestrategien

Synonym zu Problemlösestrategien gebraucht Schoenfeld das Wort Heuristiken, allerdings nicht im recht konkreten Sinne Dörners als internalisierte Verhaltenweisen, sondern mehr als externale abstrakte „Faustregeln", Zen-Sprüchen gleich, mit deren Hilfe man Probleme angehen kann[18]. Sie haben rein deskriptiven, niemals präskriptiven Charakter[19]. Für Schoenfeld endet der Begriff Heuristik dort, wo algorithmische, routinemäßige Anwendung beginnt[20]. Speziell direkte Instruktion am Beispiel und wiederholtes prozedurales Üben hält er mit Heuristiken für unvereinbar[21]. Sein Begriff der Heuristik bleibt damit im Unkonkreten und entzieht sich der Internalisierung. Damit macht er sich eine Vorstellung einer rekursiven[22] Natur eines möglichen Verständnisses Pólyas und damit der prinzipiellen Unvermittelbarkeit seiner Heuristiken zu eigen:

> „Das heißt, ihre Darstellung [die der Heuristiken, d. A.] erlaubte es einem, die Strategien zu erkennen, wenn sie benutzt wurden. Dagegen waren Pólyas Darstellungen nicht detailliert genug, um denen, die mit ihnen noch nicht vertraut waren zu ermöglichen, sie umzusetzen."[23]

Das führt allerdings zu begrifflichen Schwierigkeiten. Schoenfeld führt an mehreren mathematischen Beispielen Pólyas Heuristik des „Untersuchens von Spezialfällen"[24] durch und stellt fest, dass alle Beispiele andere Spezialfälle erfordern[25]:

> „Um ein unbekanntes Problem besser zu verstehen, sollte man das Problem möglicherweise an Hand von exemplari-

18 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 353.
19 A. a. O.
20 A. a. O., S. 354.
21 A. a. O.
22 Wo sich die Katze in den Schwanz beißt.
23 A. a. O., S. 353: „That is, the characterizations allowed one to recognize the strategies when they are being used. However, Pólya's characterizations did not provide the amount of detail that would enable people who werde not already familiar with the strategies to be able to implement them" Ü.d.A.
24 A. a. O., S. 353.
25 A. a. O.

> schen Spezialfällen betrachten. Dies könnte eine Richtung, oder vielleicht die Plausibilität einer Lösung aufzeigen.“[26]

Nun hatte die Versuchsperson Dörners in Kapitel 4.3, (S. 28) offensichtlich diese Strategie im automatischen Handlungsrepertoire, indem sie zunächst ohne weiter darüber nachzudenken ein paar Spezialfälle betrachtete. Damit wäre diese Strategie eine Heuristik im Sinne Dörners, aber keine Heuristik im Sinne Schoenfelds mehr. Es scheint daher sinnvoll, Schoenfelds mystisierende Abgrenzung aufzugeben und auch so etwas wie Pólyas Problemlösestrategien als Heuristiken im Sinne Dörners anzusehen, die allerdings unterschiedliche Grade an Internalisierung erfahren haben. Dörners Heuristiken wären damit „in Fleisch und Blut“[27] übergegangene Strategien, neben Heuristiken als Strategien Pólyascher Prägung, deren Erlernen und Automatisierung noch aussteht.

5.3.3 Monitoring und Selbstkontrolle

Monitoring und Selbstkontrolle fällt für Schoenfeld in den Bereich Metakognition[28], die nach Kapitel 4.3 nichts anderes ist, als eine bewusste Steuerung der Auswahl von Prozessen der Epistemischen Struktur. Er betrachtet hier Verhaltensweisen, die den Verlauf und die Effizienz eines Problemlöseprozesses entscheidend beeinflussen können.

Zunächst nennt er an einem Beispiel einer Langzeitstudie die Fähigkeit, bewusst vorauszuplanen und zu strategisieren[29]. In dieser Studie sollten Kinder zwischen vier und neun Jahren geschlossene Schleifen unter Benutzung aller Elemente einer Auswahl von Eisenbahnschienen herstellen. Während die Vierjährigen direkt ans unstrukturierte Puzzlen gingen, sortierten die Neunjährigen die Schienen zunächst nach ihren Eigenschaften, um sie dann gezielt auszuwählen und die Aufgabe so effizienter zu bewältigen[30].

26 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 353: „To better understand an unfamiliar problem, you may wish to exemplify the problem by considering various special cases. This may suggest the direction of, or perhaps the plausibility of, a solution.“Ü.d.A.

27 oder eher: Synapsen

28 A. a. O., S. 354.

29 A. a. O., S. 355.

30 A. a. O.

Es scheint sinnvoll, hier die Bemerkung einzuschieben, dass für die Probandinnen und Probanden der unterschiedlichen Altersstufen wahrscheinlich nicht die gleichen Problemtypen vorlagen. Ein vierjähriges Kind wird im allgemeinen nicht auf den gleichen geometrischen und praktischen Erfahrungschatz in Bezug auf Schienennetze zurückgreifen können, wie ein Neunjähriges. Die Neunjährigen bearbeiten hier eher ein reines Interpolationsproblem, während die vierjährigen Kinder zudem höchstwahrscheinlich ein Syntheseproblem nach Dörner bewältigen müssen.

Planung und Strategisieren setzen also voraus, dass ein Zielzustand hinreichend klar antizipiert werden kann und Werkzeuge und Methoden zumindest in groben Zügen in ihrer Wirkung abschätzbar sind. Dialektische Probleme sind in diesem Sinne nicht „durchzuplanen“.

Ähnlich verhält es sich mit Schoenfelds zweitem Themenfeld, dem Ressourcenmanagement[31]. Er fasst mehrere Studien der 1880er Jahre mit dem saloppen Satz zusammen: „Es geht nicht nur darum, was du weißt, sondern wie, wann, und ob Du es benutzt.“[32] Auch ein souveräner Umgang mit der eigenen Wissensbasis erfordert eine gewisse Übersicht über die Voraussetzungen und Werkzeuge für eine erfolgreiche Problembewältigung. Problematisch sind dabei die „unknown unknowns“, die Stolpersteine und Hürden auf dem Weg dahin, die man nicht wahrnehmen kann. Für eine erfolgreiche Problemlösung ist es aber entscheidend zu wissen, dass die derzeit bekannten eigenen Methoden nicht ausreichen; dass man also nicht eine der bekannten Formeln nur richtig anwenden muss, um ein korrektes Ergebnis zu erhalten[33], sondern dass zunächst eine neue, korrekte Formel aufgestellt oder gefunden werden muss. Es scheint bei Schoenfelds Ressourcenmanagement also implizit darum zu gehen, eine Art Meta-Wissen darüber zu haben, ob die eigene Wissensgrundlage ausreicht, das Problem als ein Synthese- oder Interpolationsproblem behandeln zu können. In Kapitel 2.2 wurde bereits dargestellt, dass self-assessment der eigenen Fähigkeiten und Wissensgrundlagen für Novizen in einem Themenfeld

31 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 355: „ressource management“.
32 A. a. O., S. 355: „It’s not just what you know; it’s how, when, and whether you use it.“ Ü.d.A.
33 Ein Verhalten, das sich im nächsten Abschnitt zeigen wird.

schwer ist. Somit wird jedes Problem auch zu einem dialektischen Problem im Sinne Dörners, bei dem es gilt abzuschätzen, ob die eigenen Methoden ausreichen.

Planung und Ressourcenmanagement können damit nicht mit der Implementation eines gefassten Planes enden, da mit jedem Schritt Denkfehler, Fehleinschätzungen und Wissenslücken wirksam werden können. Um effizient Probleme lösen zu können, ist es wichtig, derlei Lapsus zeitnah zu bemerken. Es ist also nötig, sich bei der Problemlösung gleichsam über die Schulter zu schauen und zu hinterfragen, was und warum man dort gerade so treibt.

In der Tat lässt sich bei Mathematikerinnen und Mathematikern und erfolgreichen Problemlöserinnen und Problemlösern genau dieses Verhalten beobachten. Schoenfeld schreibt:

> „Als erstes fällt auf, dass der Mathematiker mehr als die Hälfte der ihm zugestandenen Zeit darauf verwendete, das Problem zu verstehen. Anstatt sich auf eine bestimmte Richtung festzulegen, verbrachte er signifikant viel Zeit mit Analyse und (struktriertem) Ausprobieren – ohne Zeit mit unstrukturiertem Ausprobieren zu vergeuden oder dazu überzugehen, einen Plan umzusetzen bevor er sicher war, dass er in die richtige Richtung führen würde. [...] Während er das Problem bearbeitete, warf der Mathematiker ein ganzes Labyrinth potentieller Holzwege auf, ohne sich jedoch von ihnen beirren zu lassen. Indem er sorgfältig seine Lösung beobachtete – interessanten Ansätzen nachzugehen und fruchtlose Wege zu verwerfen – löste er das Problem, während die meisten Studentinnen und Studenten scheiterten.“[34]

34 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 356: „The first thing to note is that the mathematician spent more than half of his alloted time trying to make sense of the problem. Rather than committing himself to any one particular direction, he did a significant amount of analyzing and (structured) exploring – not spending time in unstructured exploration or moving into implementation until he was sure he was working in the right direction. ... as he worked through the problem, the mathematician generated enough potential wild goose chases to keep an army of problem solvers busy. But he did not get deflected by them. By monitoring his solution with care – pursuing interesting leads and abandoning paths that didn't seem to bear fruit – he managed to solve the problem, while the vast majority of students did not.“ Ü.d.A.

Im Gegensatz dazu beobachtet Schoenfeld in seinen Studien, dass viele im Problemlösen ungeschulte Studentinnen und Studenten sich frühzeitig auf einen (Holz-)Weg festlegen und diesen auf „Deubel komm raus“[35] verfolgen, ohne damit am Ende erfolgreich zu sein.

Schoenfeld beschreibt dazu Erfahrungen aus seinen Problemlösekursen. Die Studierenden bearbeiten in Kleingruppen Probleme, und der Dozent darf jederzeit die Gruppenarbeit unterbrechen und die folgenden Fragen stellen[36]:

> „Was (genau) macht ihr gerade? (Könnt ihr es genau beschreiben?)
> Warum tut ihr das? (Wie passt das zu eurer Lösung?)
> Wie ist das hilfreich? (Was fangt ihr mit dem Ergebnis an, wenn ihr dahin kommt?)
>
> Er beginnt früh im Semester, diese Fragen zu stellen. Anfangs sind die Studierenden oft überfordert, die Fragen zu beantworten. Mit der Einsicht, dass er diese Fragen trotzdem weiter stellen wird, fangen die Studierenden an, sich zu verteidigen, indem sie die Fragen im Vorfeld unter sich klären. Am Ende des Semesters ist dieses Verhalten Gewohnheit geworden.“[37]

5.3.4 Überzeugungen und Gefühle

Schoenfeld stellt die These auf, dass „Überzeugungen mathematisches Verhalten formen“[38]. Er listet einige unter Schülerinnen und Schülern häufig vertretene Überzeugungen auf, hier eine Auswahl:

35 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 356: „pursuing that direction come hell or high water“ Ü.d.A.
36 A. a. O., S. 356.
37 A. a. O., S. 356: „What (exactly) are you doing? (Can you describe it precisely?) Why are you doing it? (How does it fit into your solution?) How does it help you? (What will you do with the outcome if you obtain it?) He begins asking these questions early in the term. When he does so, the students are usually at loss regarding how to answer them. With the recognition that, despite their uncomfortableness, he is going to continue asking those questions, the students begin to defend themselves against them by discussing the answers to them in advance. By the end of the term, this behavior has become habitual.“ Ü.d.A.
38 A. a. O., S. 360: „beliefs shape mathematical behaviour“ Ü.d.A.

- „Mathematikaufgaben haben nur eine einzige richtige Antwort.“[39]
- „Es gibt nur einen richtigen Lösungsweg für Matheaufgaben – meist den, den der Lehrer als letztes vorgestellt hat.“[40].“
- „Schülerinnen und Schüler, die gut gelernt haben, können alle an sie gestellten Aufgaben in weniger als fünf Minuten lösen.“[41].

An anderer Stelle hinterfragt er die letzte dieser Überzeugungen aus einer etwas anderen Perspektive:

> „Eine der offenen Fragen auf unserem Fragebogen für Schülerinnen und Schüler aus zwölf high school - Mathematikklassen der Jahrgangsstufen 9 bis 12 lautete wie folgt: „Wenn Du den Stoff verstehst, wie lange sollte es dauern, eine typische Hausaufgabenaufgabe zu lösen? Wie lange versucht man vernünftigerweise eine Aufgabe zu lösen, bis Du feststellst dass sie nicht lösbar ist?“ Im Schnitt lauteten die Antworten 2,2 Minuten ($n = 221$) bzw. 11,7 Minuten ($n = 227$).“[42]

An dieser Stelle wird klar, wie sehr falsche Überzeugungen über die Natur der Mathematik und des Problemlösens das Problemlösen verhindern. Im Grunde lässt die Fixierung auf eindeutige und prinzipiell bekannte Lösungswege und die Erwartung der „instant gratification“ einer schnellen Lösung gar nicht zu, neue, eigene Lösungswege für „harte Nüsse“ überhaupt zu erwägen.

Schoenfeld sieht die Ursachen dieser Überzeugungen in der Art und Weise der mathematischen Enkulturisation der Schülerinnen und

39 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 359 „Mathematics problems have one and only one answer.“ Ü.d.A.

40 A. a. O., S. 359:„There is only one correct way to solve any mathematics problem – usually the rule the teacher has most recently demonstrated to the class.“ Ü.d.A.

41 A. a. O., S. 359 „Students who have understood the mathematics they haves studied will be able to solve any assigned problem in five minutes or less.“ Ü.d.A..

42 Schoenfeld, Alan H.: When good teaching leads to bad results: the disaster of ”well taught” mathematics classes. 1988, S.159 f.: „One of the open-ended items in our questionnaire, administered on students in twelve high school mathematics classes in grade 9 to 12, read as follows: „If you understand the material, how long should it take to answer a typical homework problem? What is a reasonable amount of time to work on a problem before you know it’s impossible?“ Means for the two parts were 2.2 minutes ($n = 221$), and 11.7 minutes ($n = 227$), respectively.“ Ü.d.A.

Schüler im Mathematikunterricht[43] und in der Gesellschaft[44]. Explizit gemacht:

> „Schülerinnen und Schüler abstrahieren ihre Überzeugungen über formale Mathematik – ihre Vorstellung ihres Fachgebietes – in großem Maße aus den Erfahrungen, die sie in ihrem Klassenraum machen.“[45]

Schoenfeld beklagt allerdings die dünne Forschungslage zu diesem Themenfeld[46].

5.3.5 Gepflogenheiten

Vor dem Hintergrund des letzten Abschnittes wird klar, dass die Art und Weise, in der Mathematik mit Schülerinnen und Schülern betrieben wird, einen großen Einfluss auf die Überzeugungen und kulturelle Prägung und somit auf das Problemlöseverhalten der Schülerinnen und Schüler hat. In diesem Abschnitt stellt Schoenfeld aus didaktischer Perspektive gelungene mathematisch-soziale Umgebungen vor[47], die für diese Arbeit jedoch von nachrangigem Interesse sind.

---

43 Schoenfeld: Learning to think mathematically, S. 359.
44 A. a. O., S. 360.
45 A. a. O., S. 359: „Students abstract their beliefs about formal mathematics – their sense of their discipline – in large measure from their experiences in the classroom.“ Ü.d.A.
46 A. a. O., S. 364.
47 A. a. O., S. 365 ff..

6 Semiotik und Sprache

Mathematisches Handeln, so war der Tenor in Kapitel 5.1, lässt sich in mentale und soziale Praxis differenzieren. Diese beiden Bereiche sind jedoch nicht vollständig trennscharf. Der Grund dafür ist, dass einerseits die Werkzeuge und Objekte der mathematischen Betrachtung sozial konstituiert sind und Mathematik andererseits eine Wissenschaft ist, die eine starke schriftliche Tradition hat und die eine differenzierte und ständig wachsende eigene Symbolsprache entwickelt hat. In diesem Sinne ist Luis Radford zu verstehen, wenn er schreibt, dass „Denken [...] eine Form sozialer Zeichen-vermittelter kognitiver *Praxis*“[1] ist.

6.1 Mathematische Sprache und Semiotik

Nun ist die mathematische Sprache oberflächlich eine Fachsprache wie jede andere; sie zu verstehen, erfordert schlichtweg Kenntnis des Fachvokabulars. Die mathematische Schriftsprache ist zwar ein komplexes System von Kürzeln und Chiffren, sie ist jedoch vollständig in alltags- und fachsprachliche Ausdrücke überführbar. So lässt sich die Aussage $1 + 1 = 2$ übersetzen in: „Wenn man eins und eins zusammenzählt, so erhält man zwei.“

Interessant ist jedoch die Betrachtung der semiotischen Eigenheiten der Mathematik. Peirces Semiotisches Dreieck aus Zeichen, Bedeutung und Objekt ist als Konzept mit der grundlegenden kognitionspsychologischen Perspektive dieser Arbeit zunächst durchaus kommensurabel. Es gibt (vereinfacht) Zeichen für Objekte, deren Bedeutung für uns sich aus den mentalen Komplexionen in unserer Epistemischen Struktur ergeben, auf die sie verweisen. Diese Sicht scheint jedoch zu wenig den

1 Radford, Luis: Signs and meanings in students emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. 2001, S. 238: „thinking ... a form of social sign-mediated cognitive *praxis*.“.

sozialen Rahmen mathematischen Handelns in den Blick zu nehmen. Radford führt aus:

> „Die theoretische Perspektive, die wir in unserem Forschungsprogramm in Bezug auf einerseits konzeptionelle Aspekte von Zeichen (die Zeichen–Bezeichnetes–Beziehung) und andererseits ihre Bedeutungsfunktion (was sie meinen) einnehmen, basiert auf einer universellen semiotisch – kulturellen Konzeption von Kognition, die auf zwei grundlegenden Ideen beruht. Die eine ist die Wygotskische Idee, nach der unsere Kognition eng verknüpft ist mit, und *affiziert* ist von dem Umgang mit Zeichen. Wir betrachten Zeichen hier nicht als bloßes Beiwerk des Geistes, sondern als echte Bestandteile des Denkens. [...] [A]nstatt Zeichen als Spiegel internaler kognitiver Prozesse aufzufassen, sehen wir sie als Werkzeuge oder Prothesen des Geistes, die Handlungen des Individuums in ihrem jeweiligen Sinnkontext erst ermöglichen. Daraus folgt ein Perspektivwechsel, weg von dem, was Zeichen *repräsentieren*, hin zu dem, zu dem sie uns *befähigen*.
>
> Die zweite grundlegende Idee unseres theoretischen Rahmens dreht sich um die Bedeutung der Zeichen und betont die Tatsache, dass Zeichen, *mit* denen jemand handelt und Zeichen, *in* denen jemand denkt, zu kulturellen semiotischen Systemen gehören, die das Individuum *qua* Individuum transzendieren. Zeichen führen daher ein Doppelleben. Auf der einen Seite dienen sie als Werkzeuge, die dem Einzelnen mentale Praxis erlauben. Auf der anderen Seite sind sie Teil von Systemen, die das Individuelle übersteigen und die so eine soziale Wirklichkeit objektivieren. Die Zeichen – Werkzeuge, mit denen das Individuum denkt, erscheinen so gerahmt in soziale Bedeutungen und Konventionen und verschaffen dem Individuum die sozialen Mittel semiotischer Objektifizierung.“[2]

2 Radford: Signs and meanings, S. 240 f.: „The theoretical position that we are taking in our research program concerning, on the on hand, the conceptual aspect of

Nun ist es ein Alleinstellungsmerkmal der Mathematik (speziell der Reinen Mathematik) unter den Wissenschaften, sich ihre Objekte selbst zu schaffen. Das tut sie auf eine phänomenologisch paradoxe Weise, nämlich indem einem Symbol (z.B. $\mathbb{N}$, T_2, Kleinsche Flasche) per Definitionem eine Bedeutung in Form einer Menge von Eigenschaften (z.B. gelb, krumm, normiert, vollständig) zugeschrieben wird. Diese Bedeutungen haben zunächst kein korrespondierendes Objekt. Sie erfahren ihre Objektivierung erst innerhalb des sozio-normativen Rahmens der mathematischen Tradition, im intersubjektiven mathematischen Handeln. Dies steht im krassen Gegensatz zu den wissenschaftlichen Konventionen anderer Fachgebiete, in denen ein existierendes Phänomen zum Handlungsanlass genommen wird, zum Beispiel ein fallender Apfel. Diese phänomenologische Paradoxie der Mathematik, diese „semiotische Vertauschung von Ursache und Wirkung", findet immer dort statt, wo es um genuin mathematische Objekte geht, wo Idealisierungen und Abstraktionen stattfinden.

Auch das Konzept von Variablen in der Mathematik ist aus semiotischer Perspektive schwer zu fassen, da es sich bei einer Variablen einerseits um ein Zeichen ohne ein eindeutig bestimmtes korrespondierendes Objekt handeln kann, da sich andererseits (z.B beim Lösen einer Gleichung) die bestimmenden Faktoren des Objekts im Umgang mit dem Zeichen ändern und zu guter Letzt in algebraischen Kontex-

signs (i.e. the sign-signified relationship) and, on the other hand, their signifying feature (i.e. the one related to their meaning) is based on a general semiotic cultural conception of cognition having its roots in two basic ideas. The first one is the Vygotskian idea according to which our cognitive functioning is intimately linked, and *affected* by, the use of signs. We take signs her not as mere accessories of the mind but as concrete components of 'mentation'. ...instead of seeing signs as the reflecting mirrors of internal cognitive processes, we consider them as tools or prostheses of the mind to accomplish actions as required by the contextual activities in which the individuals engage. As a result, there is a theoretical shift from what the signs *represent* to what they *enable* us to do. The second basic idea on which our framework is based deals with the meaning of signs and stresses the fact that the signs *with* which the individual acts and *in* which the individual thinks belong to cultural symbolic systems which transcend the individual *qua* individual. Signs hence have a double life. On the one hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social reality is objectified. The sign–tools with which the individuals appear then as framed by social meanings ad rules of use and provide the individual with social means of semiotic objectification." Ü.d.A.

ten wiederum das Zeichen oberflächlich betrachtet zum Objekt selbst werden kann.

6.2 In der Praxis

Radford ist weniger an philosophischen Betrachtungen interessiert, er führt eine qualitative Längsschnittstudie durch[3]. Er betrachtet dabei Mathematikunterricht in vier Klassen aus zwei kanadischen Schulen über einen Zeitraum von drei Jahren, indem er Kleingruppen von Schülerinnen und Schülern bei ihren Aktivitäten filmt oder indem er in den Klassen Tests schreiben lässt[4]. Er stellt typische Probleme vor, wie sie die Kleingruppen zu bearbeiten hatten[5]. Sie bestehen meist aus einem Bild von einer Folge einer wachsenden Anzahl von Objekten in regelmäßiger geometrischer Anordnung. Die Problemstellung lautet hier wie folgt:

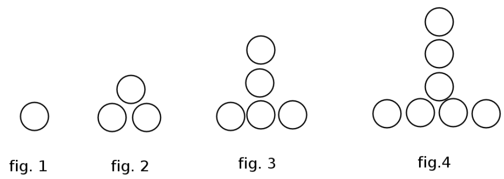

Abbildung 6.1: Muster der Aufgabenstellung (Radford: Signs and meanings, S. 242, verändert)

> „Benutze die Plättchen, die du bekommen hast, um die folgende Reihe zu legen: [...]
>
> Setze die Reihe bis einschließlich Figur 6 fort.
>
> 1. Wie viele Kreise hätte Figur Nummer 10 insgesamt?
> 2. Wie viele Kreise hätte Figur Nummer 100 insgesamt?
> 3. Schreibe nun eine Nachricht an eine Schülerin /einen Schüler einer anderen 8. Klasse, in der du verständlich erklärst, was er/sie tun muss, um herauszufinden, wie viele Kreise eine beliebige Figur der Reihe hat. [...]

3 Radford: Signs and meanings, S. 242.
4 A. a. O., S. 234.
5 A. a. O.

4. Finde eine Formel, um die Anzahl der Kreise in der Figur Nummer „n" zu berechnen."[6]

Eine mögliche Algebraisierung ist es, den Zusammenhang zwischen der Figurennummer n und der Anzahl der Kreise des horizontalen Teils der Figur wahrzunehmen und festzustellen, dass es in der Vertikalen immer einen Kreis weniger als n gibt. Eine allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl der Kreise könnte also lauten: $n + (n - 1)$. Radford schreibt dazu:

> „Um die Diskurs- und Symbol-basierten Mittel der Schülerinnen und Schüler bei Verallgemeinerungsaufgaben betrachten zu können, wurden die Aktivitäten in drei Schritte unterteilt:
>
> 1. eine arithmetische Überlegung,
> 2. das Ausdrücken einer Verallgemeinerung in Umgangssprache (in Form einer Nachricht), und
> 3. der Gebrauch algebraischer Formelsprache um Allgemeingültigkeit anzuzeigen."[7]

In der Durchführung macht Radford einige interessante Beobachtungen. Verallgemeinerungen finden in einer Weise statt, die er „metaphorisch"[8] nennt: Die Schülerinnen und Schüler sprechen über das Allgemeine am Beispiel der Figuren 12 bzw. 120, ohne jedoch auf spezifische Eigenschaften dieser Beispiele einzugehen und ohne diese konkret auszuführen[9]. So stehen die genannten Figuren in ihrer exemplarischen Unbestimmtheit stellvertretend für das Allgemeine. Zum

---

6 Radford: Signs and meanings, S. 245: „Using the bingo chips provided, reproduce the following sequence: ... Continue the sequence up to and including figure 6. a) How many circles would figure number 10 have in total? b) How many circles would figure number 100 have in total? c) You are now going to write a message to another grade 8 student from another class clearly explaining what s/he must do in order to find out how many circles there are in any given figure of the sequence. ... d) Find a formula to calculate the number of circles in figure number „n". " Ü.d.A.

7 A. a. O., S. 244: „In order to explore the discursively– and symbolically–based students' semiotic means of objectification in generalization tasks, the activity was divided into three steps: i) an arithmetic investigation, ii) the expression of generalization in natural language (in the form of a message), and iii) the use of algebraic symbolism to express generality." Ü.d.A.

8 A. a. O., S. 247: „metaphorically".

9 A. a. O., S. 247.

anderen stellen die Schülerinnen und Schüler zunächst keinen direkten Sprachzusammenhang zwischen der Nummer einer Figur und der Anzahl ihrer Kreise in der Horizontalen her[10]. Erst über die von den Schülerinnen und Schülern aufgeworfene sprachliche Konstruktion des „Ranges“[11] wird dieser Zusammenhang aussprechlich, indem einer Figur der Rang ihrer Nummer zugeschrieben wird, dem dann die Anzahl der Kreise in der Horizontalen zugeordnet werden kann. So wird eine als willkürlich empfundene numerische Zuordnung der Figuren erst über den expliziten Umweg der Ordinalität der jeweiligen Figur zu einer ihrer Eigenschaften. Die in der Aufgabenstellung geforderte Nachricht lautet im Beispiel so:

> „Wenn ich dich nach der Menge der Kreise in Figur 12 frage, dann gibt es da die gleiche Anzahl von Kreisen horizontal, wie der Rang der Figur wäre. Und um den vertikalen Rang der Figur zu bekommen, musst du 1 von der Anzahl der horizontalen Kreise abziehen.“[12]

In dem Sinne ist der Rang einer Figur noch nicht einmal als deren eindeutige abstrakte Eigenschaft verstanden, sondern als mehrdeutiges Attribut ihrer Darstellung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird analog dazu erst möglichst nahe am Konkreten, jedoch metaphorisch (im obigen Sinne) ausgeführt, um sie dann mit relativierenden Adverben (z.B. immer) zu verallgemeinern: „man fügt immer da unten eins hinzu, richtig?“[13] Als allgemeine Formel bietet diese Gruppe nach mehreren verworfenen Vorschlägen den Ausdruck $n - 1 = n$ an[14].

Die sprachliche Unsicherheit der Schülerinnen und Schüler setzt also genau dort ein, wo eine „semiotische Verwirrung“ wegen der oben beschriebenen semiotischen Eigenheiten der Mathematik zu erwarten wäre: Zunächst beim Übergang von der enaktiv erfahrenen Figur 6 zur abstrakten Betrachtung einer beliebigen Figur; hier behelfen sich die

10 Radford: Signs and meanings, S. 251.
11 A. a. O., S. 251: „rank“.
12 A. a. O., S. 251: „If I ask you to give me the amount of circles in Figure 12, there will be the same number of circle (sic!) horizontally that would be the same rank of the figure. And to have the vertical rank, you have to subtract 1 from the number of horizontal circles.“ Ü.d.A.
13 A. a. O., S. 248: „you always add 1 to the bottom, right?“ Ü.d.A.
14 A. a. O., S. 256.

Schülerinnen und Schüler mit der „metaphorischen" Sprechweise. Und ferner bei der Benutzung einer Variablen, deren Objektbezug nicht klar verstanden ist; hier formulieren die Schülerinnen und Schüler offensichtlichen Unsinn (den sie eigentlich als solchen erkennen müssten). Radford schreibt:

> „[...] [D]er Übergang von einem nicht-symbolischen zu einem symbolischen algebraischen Ausdruck der Allgemeinheit bedeutet zwei Brüche, einen mit der sinnlichen Geometrie der Muster und den andern mit ihren numerischen Eigenschaften."[15]

Diese Brüche schlagen sich nach außen in Sprachschwierigkeiten nieder, sind aber von grundlegender Art. Die Alltagssprache eignet sich nicht, um direkt über Allgemeinheit und Abstraktionen zu sprechen; sie erlaubt deren Beschreibung nur in indirekter, metaphorischer Form. Die Fachsprache der Mathematik stellt das nötige semantische Gerüst zur Verfügung, um diese Sachverhalte präzise zu benennen. Damit wird klar, dass der Erwerb der mathematischen Fachsprache nicht auf im Piagetschen Sinne assimilierende Weise passieren kann, sondern konzeptueller Akkomodation bedarf.

Da im Allgemeinen Schülerinnen und Schüler die mathematische Fachsprache nicht sicher und fluide eigenständig beherrschen, müssen sie die Begriffe und Konzepte der Aufgabenstellungen nach dem Lesen in eine vage metaphorische Alltagssprache übersetzen und nach erfolgter Bearbeitung ihre Lösungen zunächst so gut es geht alltagssprachlich ausdrücken, um diese dann möglichst gut in die Sprache der Mathematik zu übertragen. Jeder dieser drei Schritte ist ein echtes Problem im Sinne Dörners.

15 Radford: Signs and meanings, S. 261: „... the passage from a non-symbolic to a symbolic algebraic expression of generality means two ruptures, one with the sensual geometry of the pattern and the other with the numerical features of them." Ü.d.A.

7 Schlussbetrachtungen

Aus den vorausgegangenen Betrachtungen lassen sich folgende gemeinsame Erkenntnisse festhalten: Problemlösen ist ein zentrales Thema der Mathematik im eigentlichen Sinne. Wenn Mathematik als Wissenschaft einen eigenen Rang im Schulunterricht haben soll, dann muss Problemlösen stärker in den Fokus rücken. Natürlich muss der Schulunterricht die Schülerinnen und Schüler auch weiterhin auf Alltagsaufgaben vorbereiten, doch sollten algorithmische und instrumentelle Aspekte der Mathematik nicht ausschließlich den Unterricht bestimmen.

Die grundsätzlichen Vorstellungen der Psychologie und der Mathematik über Probleme und den Problemlöseprozess stimmen erstaunlich gut überein und können sich sinnvoll ergänzen. Dörners Problembegriff lässt sich mit Details aus Pólyas Definitionsversuch eindeutiger gestalten. Dieser so gewonnene Problembegriff ist aus mehrerlei Hinsicht für den Unterricht nicht zielführend, da er keine rein extrinsische Motivation zulässt und die Notwendigkeit von Versprachlichung von Lösungen nicht berücksichtigt.

Aus beiden Perspektiven stellt sich der Problemlöseprozess als Trial-and-Error-Schema da, das jedoch mit wachsender Erfahrung und wachsender Selbstkontrolle sehr viel zielgerichteter und effizienter verläuft. Die von Schoenfeld fomulierte diffuse Ablehnung der mathematischen Seite gegenüber der direkten Instruktion und dem wiederholten Einüben von Heuristiken ist nicht nachvollziehbar; sie erinnert an die Thesen des Situierten Lernens und des Konstruktivismus, dass Wissenstransfer zwischen verschiedenen Aufgaben nicht möglich und direkte Instruktion komplexen Sachverhalten nicht angemessen sei. Dementsprechend kann dieser ablehnenden Haltung mit Argumenten aus Kapitel 2.1 begegnet werden.

Dabei spricht sich Schoenfeld nicht grundsätzlich gegen direkte Instruktion aus; sein Problemlösekurs, wie in Kapitel 5.3.3 dargestellt, ist gerade so angelegt, dass durch häufige direkte Intervention mit Meta-Fragen eine regelmäßige und funktionierende Selbstkontrolle gefördert wird. Diese Haltung ist in sich widersprüchlich und eigentlich nicht aufrechtzuerhalten.

Verstehen lässt sich diese Perspektive jedoch vor dem Hintergrund der mathematischen Enkulturisation und den damit verbundenen Erwartungshaltungen. Wenn im Unterricht der Eindruck erweckt wird, jedes Problem ließe sich mit dem geeigneten „Kochrezept“ in höchstens einer Viertelstunde lösen und dass das jeweilige Kochrezept vor der Aufgabenstellung auf dem Silbertablett serviert wird, damit ein Problem lösbar erscheint, so ist das ebenfalls keine angemessene Behandlung der Mathematik in der Schule. Hier ist also Augenmaß gefragt, um eine geeignete Balance zwischen effizienter Heuristikenvermittlung und redlichem Mathematikunterricht zu finden.

Dörners Ausdifferenzierung der unterschiedlichen Problemtypen spielt für die Unterrichtsgestaltung und Forschung eine nicht zu unterschätzende Rolle. Heuristiken und Hilfestellungen, die im Unterricht zum Beispiel bei Interpolationsproblemen sinnvoll sind (Probiere alle Schlüssel aus, bis Du den richtigen hast!), können bei Syntheseproblemen (Kann da überhaupt ein richtiger Schlüssel am Bund sein?) zu Misserfolgen und Frustration führen, speziell bei unsicheren Schülerinnen und Schülern. Studien, die die unterschiedlichen Erfahrungswelten der Probanden und Probandinnen nicht berücksichtigen, vergleichen im Zweifel Äpfel mit Birnen, wie möglicherweise in der Studie mit den Gleisnetzen (Kapitel 5.3.3). Hier wäre in der Forschung eine größere Sensibilität und Transparenz wünschenswert.

Für das Unterrichtsgeschehen erstaunlich interessant erweist sich das zunächst abseitig erscheinende Feld der Semiotik und der Sprache. Unter dieser Perspektive lassen sich innerhalb des Problemlöseprozesses im Schulkontext einige neue, sonst nicht offensichtliche neuralgische Stellen ausmachen, an denen Schülerinnen und Schüler vor wiederum andersartigen Problemen im Sinne Dörners stehen können. Der für Schülerinnen und Schüler in der vollständigen Bearbeitung einer Aufgabenstellung mehrfach erforderliche Übergang von Fach- zu Alltagssprache stellt sich als mentaler Transpositionsprozess dar, der nicht verlustfrei gelingen kann, da die Alltagssprache viele genuin mathematische Konzepte nicht auszudrücken vermag. Die semiotische Perspektive ermöglicht es schließlich, innerhalb des sprachlichen Feldes weitere konzeptuelle Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler auszudifferenzieren.

Von dieser Warte aus erscheint die Aufgabenstellung zur Teilbarkeit in Kapitel 4 nicht als sinnvoll und graduell im Anspruch gestuft, sondern als sprunghaftes Wechseln auf die unterschiedlichen semiotischen Ebenen der Mathematik, deren Verständnis wiederum weitreichende Akkomodationsprozesse voraussetzt. Dies sind fundamentale Herausforderungen für den Mathematikunterricht, da demnach das Leseverständnis von Problemstellungen und die Formulierung allgemeiner oder gar algebraischer Lösungen für Schülerinnen und Schüler so lange mehrstufige Syntheseprobleme oder gar Dialektische Probleme sind, bis sie eine gewisse Sicherheit im Umgang mit der mathematischen Fachsprache und mit den mathematischen Konzepten von Allgemeinheit und Variablen gewonnen haben. Auch dies erfordert eine besondere Sensibilität bei der Formulierung von Aufgaben- und Hilfestellungen.

Einig sind sich Mathematiker und Mathematikerinnen und Psychologen und Psychologinnen über die Bedeutung eines breit und sinnstiftend vernetzten Wissens über einen Realitätsbereich. Dabei sind es nicht unbedingt die einfachen und konstituierenden Eigenschaften der Gegenstände der Betrachtung, die bei einer Problemlösung helfen, sondern häufig die Eigenschaften „zweiten Grades“, die nicht sofort ins Auge fallen, (sonst gäbe es ja auch kein Problem). Es muss also Ziel des Mathematikunterrichtes sein, den Schülerinnen und Schülern zu ermöglichen, zahlreiche und beziehungsreiche Komplexionen, chunks, in ihrem Gedächtnis anzulegen und zu vernetzen. Dabei sollte in besonderer Weise Wert auf die mathematische Sprachentwicklung der Schülerinnen und Schüler gelegt werden, da sich manche mathematischen Konzepte und sprachliche Kompetenzen in ihrem Verständnis gegenseitig bedingen. Auf welche Weise das sinnvoll und effizient geschehen kann, darauf kann und will diese Arbeit keine Antwort geben.

Den aktuellen psychologischen Forschungsstand auf diesem Gebiet darzustellen und zusammenzufassen wäre eine sinnvolle Fortführung dieser Betrachtungen. Ein weiteres interessantes Forschungsfeld in diesem Zusammenhang könnte die psychologische Betrachtung der „semiotischen Verwirrung“ sein, um zu verstehen, wie unsere Kognition mit unsicheren und uneindeutigen Objekt- und Bedeutungsbezügen umgeht, für die sie nicht optimal angelegt ist.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die Schriftliche Hausarbeit selbstständig verfasst habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Alle Stellen und Formulierungen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach andern Werken entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall unter genauer Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht.

Ort, Datum Unterschrift

Literaturverzeichnis

Anderson, John R., Reder, Lynne M. und Simon, Herbert A.: Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. 2000

Dörner, D.: Problemlösen als Informationsverarbeitung. Kohlhammer, 1979, Kohlhammer Standards Psychologie: Denkpsychologie

Dunning, D. und Kruger, J.: Unskilled and unaware of it: How difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. 1999

Halmos, P.: The heart of mathematics. 1980

Pólya, G.: Mathematik und plausibles Schliessen. Birkhäuser Verlag, 1963

Pólya, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Birkhäuser Verlag, 1966

Radford, Luis: Signs and meanings in students emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. 2001

Schoenfeld, Alan H.: When good teaching leads to bad results: the disaster of "well taught" mathematics classes. 1988

Schoenfeld, Alan H.: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. 1992